
Spis treści

O autorach	13
Wstęp	15
Przedmowa do wydania drugiego	18
Przedmowa do wydania trzeciego	19
1. Repetytorium	21
1.1. Elementy logiki, zbiory i relacje	21
1.1.1. Rachunek zdań	21
1.1.2. Funkcje zdaniowe. Kwantyfikatory	24
1.1.3. Formy zapisu twierdzeń i definicji	27
1.1.4. Zbiory. Przedziały liczbowe	28
1.1.5. Iloczyn kartezjański zbiorów	34
1.1.6. Relacje. Rodzaje i własności	36
1.2. Działania na liczbach rzeczywistych oraz wyrażeniach algebraicznych	37
1.2.1. Podstawowe działania w zbiorze liczb rzeczywistych	37
1.2.2. Pojęcie logarytmu	40
1.2.3. Wartość bezwzględna i cecha	41
1.2.4. Silnia i dwumian Newtona	42
1.2.5. Wzory skróconego mnożenia	43
1.3. Elementy geometrii na płaszczyźnie	44
1.3.1. Wektory w płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$	44
1.3.2. Proste na płaszczyźnie	51
1.3.3. Równania okręgu i elipsy	54
1.4. Funkcja i jej własności	56
1.4.1. Dziedzina, zbiór wartości i wykres funkcji	56
1.4.2. Funkcja odwrotna	59
1.4.3. Złożenie funkcji	63
1.4.4. Parzystość i nieparzystość funkcji	63
1.4.5. Okresowość funkcji	66

1.4.6. Monotoniczność funkcji. Ekstrema lokalne funkcji	67
1.4.7. Wypukłość i wklęsłość funkcji. Punkty przegięcia	73
1.5. Ciąg liczbowy.....	76
1.5.1. Definicja ciągu	76
1.5.2. Monotoniczność ciągu.....	77
1.5.3. Ciąg arytmetyczny i geometryczny	79
1.6. Przegląd funkcji elementarnych	82
1.6.1. Funkcja liniowa	82
1.6.2. Funkcja kwadratowa	93
1.6.3. Funkcja wielomianowa.....	99
1.6.4. Funkcja wymierna.....	106
1.6.5. Funkcja potęgowa.....	115
1.6.6. Funkcja wykładnicza	119
1.6.7. Funkcja logarytmiczna.....	121
1.6.8. Funkcje trygonometryczne	123
1.6.9. Funkcje cyklometryczne	129
1.6.10. Funkcje elementarne. Sklejenie funkcji	133
2. Macierze i liczby zespolone	135
2.1. Definicja i rodzaje macierzy	135
2.2. Działania na macierzach	139
2.3. Wyznacznik macierzy	148
2.3.1. Obliczanie wyznaczników macierzy wyższych stopni	152
2.3.2. Własności wyznacznika	156
2.4. Rząd macierzy.....	163
2.4.1. Własności rzędu macierzy.....	165
2.5. Macierz odwrotna.....	170
2.5.1. Odwracanie macierzy metodą operacji elementarnych	176
2.5.2. Zastosowanie macierzy odwrotnej do rozwiązywania równań macierzowych	178
2.6. Układy równań liniowych	183
2.6.1. Układy Cramera	183
2.6.2. Twierdzenie Kroneckera-Capellego	189
2.6.3. Rozwiązywanie układów równań metodą eliminacji Gaussa	196
2.7. Wektory i wartości własne macierzy	202
2.8. Liczby zespolone.....	205
2.8.1. Podstawowe własności liczb zespolonych	205
2.8.2. Interpretacja geometryczna	211
2.8.3. Postać trygonometryczna liczby zespolonej.....	213
2.8.4. Równania wielomianowe w zbiorze liczb zespolonych	221
2.9. Zadania i odpowiedzi	225

3. Zastosowania ekonomiczne teorii macierzy i układów równań	238
3.1. Tablice i modele input-output	243
3.2. Renty gruntowe.....	248
3.2.1. Renty ekstensywne.....	248
3.2.2. Renty intensywne.....	252
3.3. Teoria kosztów komparatywnych – przykład.....	255
3.4. Zastosowanie wartości własnych i wektorów własnych	257
3.5. Zadania i odpowiedzi	258
4. Granica ciągu liczbowego.....	264
4.1. Definicja granicy ciągu liczbowego. Ciągi zbieżne	264
4.2. Ciągi rozbieżne	267
4.3. Podstawowe twierdzenia dotyczące granic	270
4.3.1. Działania na granicach	270
4.3.2. Działania na nieskończonościach.....	272
4.3.3. Symbole nieoznaczone	273
4.4. Obliczanie granic ciągów.....	274
4.4.1. Twierdzenie o trzech ciągach	283
4.4.2. Liczba e jako granica ciągu	285
4.5. Zadania i odpowiedzi	289
5. Elementy matematyki finansowej	293
5.1. Oprocentowanie, kapitalizacja	294
5.1.1. Oprocentowanie.....	294
5.1.2. Kapitalizacja prosta i złożona.....	295
5.1.3. Kapitalizacja zgodna – oprocentowanie dekursywne i antycypatywne	298
5.1.4. Oprocentowanie w ciągu roku.....	300
5.1.5. Metoda liczb procentowych	303
5.1.6. Kapitalizacja ciągła.....	304
5.1.7. Efektywna stopa procentowa.....	305
5.1.8. Kapitalizacja przy zmiennej stopie procentowej	307
5.1.9. Zasada równoważności.....	308
5.1.10. Równoważne stopy procentowe i dyskontowe	308
5.1.11. Oprocentowanie mieszane.....	310
5.2. Spłata długów i kredytów	311
5.2.1. Długi krótkoterminowe.....	313
5.2.2. Długi średnioterminowe i długoterminowe	314
5.2.3. Spłata długu o danych ratach łącznych, zgodna	315
5.2.4. Ustalenie brakującej raty łącznej	317
5.2.5. Raty kapitałowe o równych wysokościach.....	320
5.2.6. Spłata jednorazowa	321

5.2.7. Jednorazowa spłata długu przy ratalnej spłacie odsetek	322
5.2.8. Konwersja długów	323
5.3. Renty kapitałowe	324
5.3.1. Renty równoważne	326
5.3.2. Renty tworzące ciągi arytmetyczny i geometryczny	328
5.3.3. Renty kapitałowe z uwzględnieniem inflacji	333
5.4. Metody oceny projektów inwestycyjnych	335
5.4.1. Metoda kapitałowa	335
5.5. Wycena papierów wartościowych	341
5.5.1. Obligacje o stałym oprocentowaniu	341
5.5.2. Akcje	342
5.5.3. Modele dywidendy	343
5.6. Zadania i odpowiedzi	344
6. Granica i ciągłość funkcji. Asymptoty	352
6.1. Granica funkcji w punkcie	352
6.1.1. Definicja Cauchy'ego granicy funkcji	352
6.1.2. Definicja Heinego granicy funkcji	354
6.2. Granice jednostronne	356
6.2.1. Granice jednostronne w sensie Cauchy'ego	356
6.2.2. Granice jednostronne w sensie Heinego	358
6.3. Granica funkcji w ∞ i $-\infty$	359
6.3.1. Granice w ∞ i $-\infty$ w sensie Cauchy'ego	359
6.3.2. Granice w ∞ i $-\infty$ w sensie Heinego	360
6.4. Działania na granicach	361
6.5. Działania na nieskończonościach	364
6.6. Obliczanie granic funkcji	364
6.6.1. Granice funkcji wielomianowych	365
6.6.2. Granice funkcji wymiernych	365
6.6.3. Granice funkcji niewymiernych	368
6.6.4. Granice typu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	370
6.6.5. Granice typu $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	372
6.6.6. Twierdzenie o trzech funkcjach	374
6.7. Asymptoty funkcji	376
6.8. Ciągłość funkcji	383
6.9. Twierdzenia o funkcjach ciągłych	392
6.9.1. Twierdzenie Weierstrassa	392
6.9.2. Twierdzenie Darboux	393
6.10. Zadania i odpowiedzi	395

7. Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej	402
7.1. Pochodna funkcji	402
7.1.1. Iloraz różnicowy	402
7.1.2. Pochodna funkcji w punkcie	404
7.1.3. Pochodna jako funkcja	408
7.1.4. Pochodne wyższych rzędów	413
7.2. Twierdzenia dotyczące pochodnych	414
7.2.1. Twierdzenia o wartości średniej w rachunku różniczkowym	415
7.2.2. Różniczka funkcji jednej zmiennej	417
7.2.3. Twierdzenie de l'Hospitala	420
7.2.4. Wzór Taylora i Maclaurina	423
7.3. Zastosowanie pochodnej do badania własności funkcji	428
7.3.1. Ekstrema i monotoniczność funkcji	428
7.3.2. Punkty przegięcia i przedziały wypukłości	438
7.3.3. Badanie przebiegu zmienności funkcji	443
7.4. Zadania i odpowiedzi	456
8. Zastosowania ekonomiczne pochodnej funkcji jednej zmiennej	477
8.1. Interpretacja ekonomiczna pochodnej	477
8.2. Podstawowe funkcje w ekonomii oraz ich pochodne	478
8.2.1. Funkcje kosztu, przychodu i zysku	478
8.2.2. Funkcja produkcji	480
8.2.3. Funkcja popytu i podaży	481
8.2.4. Konsumpcja i oszczędności	481
8.2.5. Funkcja użyteczności	482
8.3. Elastyczność funkcji	483
8.3.1. Wybrane rodzaje elastyczności	483
8.3.2. Formuła Amoroso-Robinsona	485
8.4. Funkcje Törnquista	486
8.5. Funkcja trendu	489
8.6. Zadania i odpowiedzi	491
9. Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej	501
9.1. Całka nieoznaczona	501
9.1.1. Definicja i podstawowe własności całki nieoznaczonej	501
9.1.2. Podstawowe metody całkowania	505
9.1.3. Całka z funkcji wymiernej	512
9.1.4. Całkowanie wybranych funkcji niewymiernych	519
9.2. Całka oznaczona w sensie Riemanna	526
9.2.1. Definicja i podstawowe własności całki oznaczonej	526
9.2.2. Interpretacja geometryczna całki oznaczonej	529

9.3. Całka niewłaściwa.....	541
9.3.1. Całka z funkcji nieograniczonej	541
9.3.2. Całka w przedziale nieograniczonym	544
9.3.3. Całka niewłaściwa a pole powierzchni	546
9.4. Zadania i odpowiedzi	552
10. Przykłady ekonomicznych zastosowań całki oznaczonej	561
10.1. Ekonomiczna interpretacja całki oznaczonej.....	561
10.2. Zadania i odpowiedzi	564
11. Szeregi liczbowe i potęgowe	566
11.1. Szereg liczbowy	566
11.1.1. Definicja i podstawowe własności szeregu liczbowego	566
11.1.2. Badanie zbieżności szeregów z definicji	568
11.1.3. Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych	571
11.1.4. Szeregi naprzemienne	581
11.2. Szeregi potęgowe	583
11.2.1. Obszar zbieżności szeregu potęgowego	584
11.2.2. Suma szeregu potęgowego	587
11.3. Zadania i odpowiedzi	595
12. Funkcje dwóch zmiennych	601
12.1. Podstawowe pojęcia.....	601
12.2. Ciąg i granica ciągu w przestrzeni $\mathbb{R}^2$	604
12.3. Granica i ciągłość funkcji w przestrzeni $\mathbb{R}^2$	605
12.4. Rachunek różniczkowy funkcji dwóch zmiennych.....	607
12.4.1. Pojęcia różniczkowalności i pochodnych cząstkowych.....	608
12.4.2. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów	610
12.4.3. Gradient i pochodna kierunkowa	612
12.4.4. Różniczka funkcji dwóch zmiennych	613
12.5. Ekstrema funkcji dwóch zmiennych	615
12.5.1. Ekstrema lokalne	615
12.5.2. Ekstrema warunkowe	622
12.5.3. Ekstrema globalne funkcji dwóch zmiennych	626
12.6. Funkcje uwikłane jednej zmiennej.....	633
12.6.1. Definicja funkcji uwikłanej	633
12.6.2. Ekstrema funkcji uwikłanych.....	634
12.7. Całka podwójna	637
12.7.1. Definicja i własności całki podwójnej	637
12.7.2. Całka iterowana	639

12.7.3. Zamiana zmiennych w całce podwójnej	647
12.7.4. Zastosowanie całki podwójnej	653
12.8. Zadania i odpowiedzi	660
13. Zastosowania ekonomiczne funkcji wielu zmiennych	672
13.1. Relacja preferencji konsumenta	672
13.2. Funkcja użyteczności	676
13.2.1. Prawo Gossena dla koszyka dóbr	676
13.3. Funkcja popytu konsumenta.....	679
13.4. Funkcje produkcji	681
13.5. Metoda najmniejszych kwadratów	686
13.6. Zadania i odpowiedzi	689
14. Równania różniczkowe i różnicowe	692
14.1. Równania różniczkowe zwyczajne	692
14.1.1. Definicja i podstawowe pojęcia	692
14.1.2. Wybrane typy równań pierwszego rzędu	694
14.1.3. Równanie różniczkowe Bernoulliego	706
14.2. Równania różnicowe	708
14.2.1. Pojęcie równania różnicowego	708
14.2.2. Równania różnicowe liniowe o stałych współczynnikach	710
14.2.3. Równania różnicowe pierwszego rzędu o stałych współczynnikach	712
14.3. Zadania i odpowiedzi	714
15. Zastosowanie równań różniczkowych i różnicowych w ekonomii	719
15.1. Matematyczny model wzrostu Domara–Harroda	719
15.2. Model oczekiwań inflacyjnych	720
15.3. Ciągły dynamiczny model input-output.....	720
15.4. Model pajęczyny	721
Bibliografia	725