

# Spis rzeczy

Od Wydawnictwa . . . . .	5
Z przedmowy autora do wydania pierwszego . . . . .	7
Z przedmowy autora do wydania drugiego . . . . .	9

## Wstęp

### Istota rachunku prawdopodobieństwa

§ 1. Podłoże . . . . .	11
§ 2. Sposób wykładu . . . . .	13
§ 3. Prawdopodobieństwo „statystyczne” . . . . .	14
§ 4. Podsumowanie . . . . .	15
§ 5. Uwagi historyczne. . . . .	16

## Rozdział I

### Przestrzeń próbek

§ 1. Podłoże empiryczne . . . . .	17
§ 2. Przykłady . . . . .	19
§ 3. Przestrzeń próbek. Zdarzenia. . . . .	23
§ 4. Relacje między zdarzeniami . . . . .	24
§ 5. Dyskretne przestrzenie próbek . . . . .	27
§ 6. Prawdopodobieństwo w dyskretnych przestrzeniach próbek. Uwagi wstępne . . . . .	28
§ 7. Podstawowe definicje i reguły . . . . .	31
§ 8. Zadania . . . . .	33

## Rozdział II

### Elementy kombinatoryki

§ 1. Wiadomości wstępne. . . . .	35
§ 2. Próbkki . . . . .	38
§ 3. Przykłady. . . . .	40

§ 4. Podpopulacje i podziały . . . . .	42
§ 5*. Zastosowanie do zadania o rozmieszczeniu . . . . .	46
§ 5a. Zastosowanie do teorii serii . . . . .	50
§ 6. Rozkład hipergeometryczny . . . . .	51
§ 7. Przykłady czasów oczekiwania . . . . .	55
§ 8. Współczynniki dwumianowe . . . . .	58
§ 9. Wzór Stirlinga . . . . .	60
§ 10. Zadania i przykłady . . . . .	62
§ 11. Zadania i uzupełnienia o charakterze teoretycznym . . . . .	65
§ 12. Zadania i tożsamości dotyczące współczynników dwumianowych . . . . .	69

### Rozdział III\*

#### Fluktuacje przy rzutach monetą i błądzenie przypadkowe

§ 1. Uwagi ogólne . . . . .	74
§ 2. Zagadnienie uporządkowania . . . . .	77
§ 3. Błądzenie przypadkowe i rzuty monetą . . . . .	80
§ 4. Inne sformułowanie twierdzeń kombinatorycznych . . . . .	81
§ 5. Prawdopodobieństwa długich prowadzeń, pierwsze prawo arcusa sinusa . . . . .	84
§ 6. Liczba powrotów do początku . . . . .	88
§ 7. Ilustracja doświadczalna . . . . .	90
§ 8. Różne uzupełnienia . . . . .	92

### Rozdział IV\*

#### Kombinacja zdarzeń

§ 1. Sumy zdarzeń . . . . .	94
§ 2. Zastosowanie do klasycznego zagadnienia o rozmieszczeniach . . . . .	97
§ 3. Realizacja $m$ spośród $N$ zdarzeń . . . . .	102
§ 4. Zastosowania do skojarzeń i zgadywań . . . . .	103
§ 5. Różne uzupełnienia . . . . .	106
§ 6. Zadania . . . . .	107

### Rozdział V

#### Prawdopodobieństwo warunkowe. Niezależność statystyczna

§ 1. Prawdopodobieństwo warunkowe . . . . .	110
§ 2. Prawdopodobieństwa określone za pomocą prawdopodobieństw warunkowych. Schematy urnowe . . . . .	114
§ 3. Niezależność statystyczna . . . . .	120
§ 4. Próby wielokrotne . . . . .	123
§ 5*. Zastosowanie do genetyki . . . . .	127
§ 6*. Cechy związane z płcią . . . . .	131
§ 7*. Selekcje . . . . .	133
§ 8. Zadania . . . . .	135

## Rozdział VI

**Rozkład dwumianowy i rozkład Poissona**

§ 1. Próby Bernoulliego . . . . .	141
§ 2. Rozkład dwumianowy . . . . .	142
§ 3. Wyraz środkowy i „ogony” . . . . .	144
§ 4. Prawo wielkich liczb . . . . .	146
§ 5. Przybliżenie Poissona . . . . .	147
§ 6. Rozkład Poissona . . . . .	151
§ 7. Przykłady obserwacji zgodnych z rozkładem Poissona . . . . .	154
§ 8. Czasy oczekiwania. Ujemny rozkład dwumianowy . . . . .	159
§ 9. Rozkład wielomianowy . . . . .	161
§ 10. Zadania . . . . .	162

## Rozdział VII

**Przybliżenie rozkładu dwumianowego rozkładem normalnym**

§ 1. Rozkład normalny . . . . .	168
§ 2. Twierdzenie graniczne de Moivre'a-Laplace'a . . . . .	171
§ 3. Przykłady . . . . .	177
§ 4. Związek z przybliżeniem Poissona . . . . .	180
§ 5. Wielkie odchylenia . . . . .	181
§ 6. Zadania . . . . .	182

## Rozdział VIII\*

**Nieskończone ciągi prób Bernoulliego**

§ 1. Nieskończone ciągi prób . . . . .	186
§ 2. Systemy gry . . . . .	189
§ 3. Lematy Borela-Cantelliego . . . . .	191
§ 4. Mocne prawo wielkich liczb . . . . .	193
§ 5. Prawo iterowanego logarytmu . . . . .	195
§ 6. Interpretacja w języku teorii liczb . . . . .	199
§ 7. Zadania . . . . .	200

## Rozdział IX

**Zmienne losowe. Wartość oczekiwana**

§ 1. Zmienne losowe . . . . .	202
§ 2. Wartości oczekiwane . . . . .	209
§ 3. Przykłady i zastosowania . . . . .	212
§ 4. Wariancja . . . . .	216
§ 5. Kowariancja. Wariancja sumy . . . . .	218
§ 6. Nierówność Czebyszewa . . . . .	222

§ 7*. Nierówność Kołmogorowa . . . . .	223
§ 8*. Współczynnik korelacji . . . . .	224
§ 9. Zadania . . . . .	226

## Rozdział X

### Prawa wielkich liczb

§ 1. Zmienne losowe o jednakowym rozkładzie . . . . .	231
§ 2*. Dowód prawa wielkich liczb . . . . .	235
§ 3. Teoria gier „sprawiedliwych” . . . . .	236
§ 4*. Gra petersburska . . . . .	238
§ 5. Przypadek niejednakowych rozkładów . . . . .	241
§ 6*. Zastosowania do kombinatoryki . . . . .	244
§ 7*. Mocne prawo wielkich liczb . . . . .	246
§ 8. Zadania . . . . .	249

## Rozdział XI

### Zmienne losowe przyjmujące wartości całkowite nieujemne. Funkcje tworzące

§ 1. Uwagi ogólne . . . . .	251
§ 2. Kompozycja (splot) . . . . .	253
§ 3. Zastosowanie do czasu pierwszego przejścia i czasu powrotu w doświadczeniach Bernoulliego . . . . .	256
§ 4. Rozkład na ułamki proste . . . . .	260
§ 5. Dwuwymiarowe funkcje tworzące . . . . .	263
§ 6*. Twierdzenie o ciągłości . . . . .	264
§ 7. Zadania . . . . .	266

## Rozdział XII\*

### Rozkłady złożone. Procesy gałązkowe

§ 1. Sumy losowej liczby zmiennych losowych . . . . .	270
§ 2. Złożony rozkład Poissona . . . . .	272
§ 3. Rozkłady nieskończenie podzielne . . . . .	273
§ 4. Przykłady procesów gałązkowych . . . . .	274
§ 5. Prawdopodobieństwo wymarcia w procesach gałązkowych . . . . .	276
§ 6. Zadania . . . . .	278

## Rozdział XIII

### Zdarzenia rekurencyjne. Równanie odnowienia

§ 1. Nieformalny wstęp i przykłady . . . . .	280
§ 2. Definicje . . . . .	283
§ 3. Podstawowe zależności . . . . .	287

§ 4. Równanie odnowienia . . . . .	291
§ 5. Opóźnione zdarzenia rekurencyjne . . . . .	294
§ 6. Liczba pojawień się zdarzenia $\delta$ . . . . .	297
§ 7*. Zastosowania do teorii serii . . . . .	300
§ 8*. Ogólniejsze wzorce standardowe . . . . .	304
§ 9. Brak pamięci dla geometrycznego rozkładu czasu oczekiwania . . . . .	305
§ 10. Dowód twierdzenia 3 z paragrafu 3 . . . . .	306
§ 11. Zadania . . . . .	308

#### Rozdział XIV

### Błądzenie przypadkowe i zadanie o ruinie gracza

§ 1. Uwagi wstępne . . . . .	312
§ 2. Klasyczne zadanie o ruinie gracza . . . . .	314
§ 3. Oczekiwana długość gry . . . . .	317
§ 4*. Funkcja tworząca długości gry oraz czasu pierwszego przejścia . . . . .	319
§ 5*. Wyrażenia jawne . . . . .	321
§ 6. Przejście do granicy: procesy dyfuzji . . . . .	323
§ 7*. Błądzenie przypadkowe na płaszczyźnie i w przestrzeni . . . . .	328
§ 8. Uogólnione jednowymiarowe błądzenie przypadkowe (losowanie sekwencyjne) . . . . .	331
§ 9. Zadania . . . . .	334

#### Rozdział XV

### Łańcuchy Markowa

§ 1. Definicja . . . . .	338
§ 2. Przykłady ilustrujące . . . . .	340
§ 3. Prawdopodobieństwa przejścia w $n$ krokach . . . . .	347
§ 4. Domknięcie i zbiory zamknięte . . . . .	349
§ 5. Klasyfikacja stanów . . . . .	351
§ 6. Ergodyczne własności łańcuchów nieprzywiedlnych . . . . .	355
§ 7*. Łańcuchy okresowe . . . . .	360
§ 8. Stany chwilowe . . . . .	361
§ 9. Zastosowanie do zagadnienia tasowania kart . . . . .	366
§ 10. Ogólny proces Markowa . . . . .	367
§ 11*. Różne uzupełnienia . . . . .	371
§ 12. Zadania . . . . .	374

#### Rozdział XVI\*

### Algebraiczne metody badania skończonych łańcuchów Markowa

§ 1. Teoria ogólna . . . . .	378
§ 2. Przykłady . . . . .	382
§ 3. Błądzenie przypadkowe z ekranami sprężystymi . . . . .	386
§ 4. Stany chwilowe. Prawdopodobieństwa pochłonięcia . . . . .	389
§ 5. Zastosowania do czasu powrotu . . . . .	392

## Rozdział XVII

**Najprostsze procesy stochastyczne o ciągłym parametrze czasowym**

§ 1. Uwagi ogólne . . . . .	394
§ 2. Proces Poissona . . . . .	397
§ 3. Czysty proces urodzin . . . . .	399
§ 4*. Rozbieżny proces urodzin . . . . .	401
§ 5. Proces urodzin i śmierci . . . . .	404
§ 6. Wykładniczy czas działania . . . . .	408
§ 7. Kolejki i problemy obsługi . . . . .	410
§ 8. Równania wsteczne (retrospektywne) . . . . .	417
§ 9. Uogólnienie; równania Kołmogorowa . . . . .	419
§ 10. Procesy z możliwością ucieczek . . . . .	424
§ 11. Zadania . . . . .	429
<b>Odpowiedzi do zadań . . . . .</b>	<b>432</b>
<b>Skorowidz nazwisk . . . . .</b>	<b>443</b>
<b>Skorowidz pojęć . . . . .</b>	<b>446</b>