

Rozdział 12

MATEMATYKA W FINANSACH OSOBISTYCH

Viera Gafrikova

Finanse i matematyka są od wieków ściśle związane: rozwój matematyki często był motywowany potrzebą rozwiązywania problemów finansowych, a matematyka była siłą napędową rozwoju finansów. Związki te widoczne były już w starożytnych cywilizacjach, gdyż kupiectwo i handel wymagały znajomości matematyki.

Dzisiejszy świat finansów jest pełen matematycznych wzorów, równań, modeli. Współczesny analityk finansowy nie może się obejść bez rzetelnej znajomości wyższej matematyki, rachunku prawdopodobieństwa, statystyki matematycznej oraz umiejętności wykorzystania tej wiedzy w rozwiązywaniu problemów finansowych.

Dynamiczny rozwój rynków finansowych oraz ich umiędzynarodowienie, rozwój technologii informacyjno-komunikacyjnych, rosnąca złożoność produktów finansowych itp. wymagają także od konsumentów coraz większej świadomości finansowej, w tym znajomości podstaw matematyki finansowej. Jeszcze parę lat temu, takimi terminami jak „efektywna stopa procentowa lokaty” czy „rzeczywista roczna stopa oprocentowania kredytu” (rozdz. 7) posługiwali się głównie specjaliści, a dzisiaj jest to standardowa informacja podawana klientom w ofercie produktu.

Opanowanie i zrozumienie głównych pojęć i twierdzeń matematyki finansowej oraz podstawowych metod rozliczeń finansowych pozwala na odpowiedzialne, niezależne i racjonalne rozwiązywanie wielu problemów związanych z zarządzaniem finansami gospodarstw domowych.

W rozdziale skupimy się na zagadnieniach związanych z najprostszymi produktami finansowymi, za jakie uważa się lokaty bankowe i kredyty. Ograniczymy się do przedstawienia podstawowych koncepcji matematyki finansowej, które są konieczne do zrozumienia istoty tych produktów, takich jak: procent, odsetki, schemat

oprocentowania prostego i składanego, dyskontowanie, wartość pieniądza w czasie oraz sposoby spłaty długu.

12.1. Procent i schematy oprocentowania

Procent (proc.) to jedna setna określonej całości, oznaczany symbolem %. Liczbę w postaci ułamka o mianowniku 100 można zapisać również za pomocą procentu. Na przykład 15% oznacza 0,15 lub $\frac{15}{100}$. Procenty otaczają nas z każdej

strony: informują o skali obniżki (podwyżki) cen towarów, opisują skład materiału z którego wyprodukowano odzież, określają zawartość produktów spożywczych, wyrażają wyniki głosowania itp. Trudno byłoby znaleźć wydanie codziennej prasy bez informacji z wykorzystaniem procentów.

Wydawałoby się, że skoro pojęcie procentu jest tak szeroko stosowane, to jest ono powszechnie znane i rozumiane i każdy powinien sobie radzić z prostymi obliczeniami. Tak jednak nie jest. Zadanie „Pan Kowalski zarabia aktualnie 3000 złotych. Szef obiecał mu 5% podwyżki. Ile będzie zarabiał pan Kowalski po podwyżce?” wprawdzie nie sprawia problemu osobom z wyższym wykształceniem, ale co trzecia osoba z wykształceniem podstawowym sobie z nim nie radzi¹. Alarmująca sytuacja jest wśród uczniów szkoły podstawowej: próbny sprawdzian szóstoklasisty przeprowadzony w grudniu 2014 r. pokazał, że dwóch na trzech uczniów nie potrafi obliczyć procentu z danej liczby².

Przykład 1. Pojęcie procentu

Cena pewnego towaru wzrosła o 200%. Ile razy wzrosła cena tego towaru?

Rozwiązanie:

Jeżeli pierwotna cena towaru wyniosła x , to po podwyżce wyniosła ona $3x$. Cena towaru wzrosła więc 3 razy.

Pojęcie „procent” jest często mylone z pojęciem „punkt procentowy”. W punktach procentowych wyraża się różnica między dwiema wielkościami wyrażonymi w procentach. Na przykład, jeśli roczne oprocentowanie lokaty wzrośnie z 5% do 5,5%, to można powiedzieć, że „oprocentowanie wzrosło o 0,5 punktu procentowego”

¹ Stan wiedzy ekonomicznej Polaków, Raport Instytutu Wolności i Raiffeisen Polbank, lipiec 2014, s. 16, <http://instytutwolnosci.pl/wp-content/uploads/2014/07/Raport-o-Stanie-Wiedzy-Ekonomicznej-Polak%C3%B3w.pdf>, dostęp: 9.06.2015.

² Wittenberg A., *Nasze dzieci gubią się w przestrzeni*, „Dziennik Gazeta Prawna”, 18 lutego 2015, nr 33(3926).

lub „oprocentowanie wzrosło o 10%”. Niepoprawne jest natomiast stwierdzenie, że „oprocentowanie wzrosło o 0,5%”. Badania Instytutu Wolności i Raiffeisen Polbank³ pokazały, że tylko 8% ankietowanych odróżnia procent od punktu procentowego, przy czym poziom wykształcenia respondentów nie wpływa znacząco na wyniki tego badania.

W matematyce finansowej pojęcie procentu jest używane również do określenia korzyści płynących z używania obcego kapitału i często jest utożsamiane z odsetkami – takie podejście znacznie ułatwia interpretację poszczególnych pojęć oraz ich własności. Kapitał, który wygenerował odsetki nazywamy kapitałem początkowym a sumę kapitału początkowego i odsetek – kapitałem końcowym. Okres, w którym generowane są odsetki, nazywamy okresem oprocentowania, a stosunek odsetek do kapitału początkowego, nazywamy okresową stopą procentową.

Normalnie korzyści finansowe za udostępnienie kapitału odnosi strona, która udostępnia kapitał, czyli dłużnik płaci wierzycielowi: za wynajęcie samochodu czy mieszkania płaci najemca, bank wypłaca właścicielowi lokaty odsetki a za kredyt zaciągnięty w banku, klient płaci odsetki bankowi. W praktyce finansowej możliwa jest także relacja odwrotna, w której wierzyciel płaci dłużnikowi za przekazanie mu środków. Dowodzą tego zdarzające się w historii przypadki stosowania ujemnych stóp procentowych. Skutki ostatnich decyzji o wprowadzeniu ujemnych stóp procentowych, podjętych przez Europejski Bank Centralny⁴ oraz Narodowy Bank Szwajcarii⁵ w 2014 roku, odczuwają również konsumenci polscy.

Umowa transakcji finansowej pomiędzy wierzycielem i dłużnikiem najczęściej nie określa kwotowo wartości odsetek, ale wysokość okresowej stopy procentowej i sposób kalkulacji odsetek. Wyróżniamy dwa podstawowe schematy naliczania odsetek:

- **schemat oprocentowania prostego** – podstawą do naliczania odsetek w dowolnym momencie okresu oprocentowania jest kapitał początkowy i kwota naliczonych odsetek jest proporcjonalna do upływu czasu;
- **schemat oprocentowania złożonego** (składanego) – do naliczenia odsetek potrzebne jest ustalenie okresu, po upływie którego odsetki będą kapitalizowane, czyli dodane do kapitału lub inaczej, przekształcone w kapitał. Okres ten nazywamy okresem kapitalizacji. Podstawą do naliczenia odsetek w każdym kolejnym okresie kapitalizacji, jest suma kapitału i odsetek naliczonych w poprzednim okresie.

³ *Stan wiedzy ekonomicznej Polaków*, op. cit., s. 15.

⁴ ECB introduces a negative deposit facility interest rate, Press Release, ECB, 5 June 2014, https://www.ecb.europa.eu/press/pr/date/2014/html/pr140605_3.en.html, dostęp: 20.01.2015.

⁵ Swiss National Bank introduces negative interest rates, Press Release, Zurich, 18 December 2014, http://www.snb.ch/en/mmr/reference/pre_20141218/source/pre_20141218.en.pdf, dostęp: 20.01.2015.

W opisie obu schematów naliczania odsetek istotną rolę odgrywa sposób pomiaru upływu czasu, który będziemy mierzyć za pomocą jednostki umownej (np. dzień, tydzień, miesiąc, kwartał, rok, półtora roku itp.) i nazywać okresem bazowym. W praktyce finansowo-bankowej rachunek czasu jest przeprowadzany na kilka różnych sposobów. Najpopularniejsze z nich przedstawione są w tabeli 12.1.

Tabela 12.1. Rachunek czasu w matematyce finansowej

Długość okresu oprocentowania w dniach	Długość roku w dniach	Stosowana nazwa	Konwencja naliczania odsetek
Faktyczna liczba dni, uwzględniająca różną długość miesięcy, czyli 28,29,30 lub 31 dni	360 dni	reguła bankowa	Act/360
	365 dni ⁶	czas kalendarzowy	Act/365
Liczba dni uwzględniająca miesiące o równej długości 30 dni	360 dni	czas bankowy	30/360

Źródło: opracowanie własne na podstawie literatury przedmiotu.

Długość okresu oprocentowania wyrażoną faktyczną, pełną liczbą dni otrzymujemy, licząc dni od daty początkowej do końcowej okresu, pomijając zazwyczaj dzień początkowy⁷. Przyjmując miesiące o równej długości 30 dni, okres oprocentowania obliczamy jako liczbę pełnych kalendarzowych miesięcy pomnożoną przez 30 i powiększoną o liczbę dni w niepełnych miesiącach.

Oprocentowania proste – stopa stała

Przyjmijmy następujące oznaczenia i założenia:

K_0 – początkowa wartość kapitału, czyli kapitał początkowy, $K_0 > 0$,

i – stopa procentowa okresu bazowego (stopa bazowa), $i > -1$,

n – czas oprocentowania, liczony w okresach bazowych, $n = 0, 1, 2, \dots$,

K_n – końcowa wartość kapitału, czyli kapitał końcowy na końcu n -tego okresu bazowego, $K_n \geq 0$,

I_n – odsetki za n okresów bazowych.

Zgodnie z zasadą oprocentowania prostego kapitał na końcu pierwszego okresu bazowego powstaje poprzez dodanie do wartości początkowej kapitału odsetek za pierwszy okres (podstawą naliczenia odsetek jest K_0):

⁶ W zależności od banku oraz produktu, w latach przestępnych, może być uwzględniana długość roku 366 dni, ale w naszych rozważaniach takiej sytuacji nie będziemy brali pod uwagę.

⁷ Umowa produktu bankowego dokładnie określa okres, za który są naliczane odsetki, czasami jest pomijany dzień końcowy zamiast dnia początkowego.

$$K_1 = K_0 + i K_0 = K_0 (1 + i)$$

Kapitał na końcu drugiego okresu bazowego powstaje poprzez dodanie do wartości kapitału K_1 odsetek za drugi okres (podstawą naliczenia odsetek jest K_0). Gdy przeprowadzimy analogiczne rozumowanie dla kolejnych okresów, otrzymujemy wartość kapitału końcowego na końcu n -tego okresu bazowego

$$K_n = K_0 (1 + n i) \quad (1)$$

Odsetki za n okresów bazowych, czyli różnica między wartością końcową a początkową kapitału, obliczane są według wzoru:

$$I_n = K_0 n i \quad (2)$$

Łatwo sprawdzić, że ciąg kapitałów (K_n) , $n = 0, 1, 2, \dots$, jest ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie K_0 oraz o różnicy równej $i K_0$. Ciąg ten jest ciągiem rosnącym dla $i > 0$, stałym dla $i = 0$ oraz malejącym dla $i \in (-1, 0)$. Przy ujemnej stopie procentowej przyjęte przez nas założenie $K_n \geq 0$, ogranicza rozważania do czasu oprocentowania o długości $n \leq \frac{-1}{i}$ ($K_n \geq 0 \Leftrightarrow K_0 (1 + i n) \geq 0 \Leftrightarrow n \leq \frac{-1}{i}$).

W praktyce czas oprocentowania nie zawsze jest wyrażony w liczbach naturalnych, potrzebne jest więc uogólnienie modelu określonego równaniami (1), (2) dla ciągłej zmiennej czasowej t :

$$K_t = K_0 (1 + i t), \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (3)$$

$$I_t = K_0 i t, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (4)$$

gdzie

$\mathbb{R}^+$ – oznacza zbiór nieujemnych liczb rzeczywistych, czyli $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$,

t – czas liczony w okresach bazowych,

K_t – wartość końcowa kapitału w momencie $t \in \mathbb{R}^+$, $K_t \geq 0$,

I_t – odsetki za t okresów bazowych.

Pozostałe oznaczenia oraz założenia takie jak w modelu opisanym równaniami (1), (2).

Końcowa wartość kapitału K_t jest liniową funkcją czasu oprocentowania t o wyrazie wolnym K_0 oraz o współczynniku kierunkowym $K_0 i$ (rosnąca dla $i > 0$, malejąca dla $i \in (-1, 0)$ oraz stała dla $i = 0$). Przy ujemnej stopie procentowej ograniczamy rozważania do okresu oprocentowania o długości $t \leq \frac{-1}{i}$.

Przykład 2. Kalkulacja odsetek oraz kapitału końcowego według zasady oprocentowania prostego

Ile wyniosą odsetki oraz wartość końcowa dwuletniej lokaty o wartości początkowej 5000 zł, jeżeli odsetki obliczane są według schematu oprocentowania prostego, a oprocentowanie lokaty jest równe 6% w skali roku⁸.

Rozwiązanie:

Do obliczenia odsetek wykorzystamy wzór (2) dla $K_0 = 5000$ zł, $n = 2$, $i = 6\%$:

$$I_2 = 5\,000 \cdot 2 \cdot 0,06 = 600 \text{ zł}$$

a kapitał końcowy otrzymujemy jako sumę kapitału początkowego oraz odsetek:

$$K_2 = 5\,000 + 600 = 5\,600 \text{ zł}$$

Dwuletnia lokata o wartości 5000 zł przyniesie po dwóch latach 600 zł odsetek a jej wartość końcowa wyniesie 5600 zł.

Przykład 3. Wpływ dodatniej stopy procentowej oraz czasu oprocentowania na wartość kapitału końcowego

Po ilu latach kapitał początkowy wzrośnie o jedną czwartą, jeżeli odsetki są naliczane według schematu oprocentowania prostego na koniec okresów rocznych a stopa procentowa wyrażona w skali rocznej jest równa: a) 1%, b) 5%, c) 10%.

Rozwiązanie:

Wykorzystamy wzór (1) dla rocznych okresów bazowych oraz $K_n = 1,25 K_0$:

$$1,25 K_0 = K_0 (1 + n i)$$

skąd dla $i \neq 0$ mamy:

$$n = \frac{0,25}{i}$$

$$\text{a) } n = \frac{0,25}{0,01} = 25 \quad \text{b) } n = \frac{0,25}{0,05} = 5 \quad \text{c) } n = \frac{0,25}{0,1} = 2,5$$

⁸ Dla stopy procentowej w ujęciu rocznym używamy też skrótu p.a. (z łacińskiego *per annum*).

Kapitał początkowy wzrośnie o jedną czwartą po 25 latach przy oprocentowaniu 1% p.a., po 5 latach przy oprocentowaniu 5% p.a., a po 3 latach (musimy uwzględnić pełną liczbę lat) przy oprocentowaniu 10% p.a.

Przykład 4. Wpływ ujemnej stopy procentowej⁹ oraz czasu oprocentowania na wartość kapitału końcowego

Po jakim czasie kapitał końcowy osiągnąłby wartość 0, jeżeli kwartalna stopa procentowa wynosi a) –2%, b) –3%, c) –10%, odsetki naliczane są wg wzoru (4) i stosowany jest czas bankowy.

Rozwiązanie:

Przyjmując we wzorze (3) $K_t = 0$, mamy

$$0 = K_0 (1 + it)$$

Stąd dla $i \neq 0$ mamy:

$$t = \frac{-1}{i}, \text{ a więc}$$

$$\text{a) } t = \frac{-1}{-0,02} = 50 \quad \text{b) } t = \frac{-1}{-0,03} = 33\frac{1}{3} \quad \text{c) } t = \frac{-1}{-0,1} = 10$$

Kapitał końcowy osiągnąłby wartość 0 po 12,5 roku (50 kwartałów) przy stopie kwartalnej w wysokości –2%, po 8,33 roku ($33\frac{1}{3}$ kwartału) przy stopie kwartalnej –3% oraz po 2,5 roku (10 kwartałów) przy stopie kwartalnej –10%.

W praktyce finansowo-bankowej stopa procentowa jest z reguły podawana w skali rocznej (wprowadzimy dla niej specjalne oznaczenie r), a czas oprocentowania często wyrażany jest w dniach. Konieczne jest więc albo wyrażenie czasu oprocentowania w latach (poprzez podzielenie czasu oprocentowania w dniach przez liczbę dni w roku) albo użycie dziennej stopy procentowej (stopa roczna podzielona przez liczbę dni w roku). Gdy stosujemy stopę dzienną, wzory (3), (4) przybierają postać:

⁹ W latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku, władze szwajcarskie broniły się przed aprecjacją franka za pomocą ujemnych stóp procentowych. Od depozytów nierezydentów w CHF pobierano opłaty w postaci ujemnych stóp procentowych. W 1972 wprowadzono stopy na poziomie –2% kwartalnie, w 1973 na poziomie –3%, a w 1978 roku na poziomie –10% kwartalnie. Dorgan G., JP Morgan: Reflections on negative interest rates in Switzerland. 14 May 2010, <http://snbchf.com/snb/reflections-on-negative-interest-rates-in-switzerland/>, dostęp: 20.03.2015.

$$K_t = K_0 \left(1 + \frac{r}{T} t \right)$$
$$I_t = K_0 \frac{r}{T} t \tag{5}$$

gdzie
 r – stopa procentowa wyrażona w skali rocznej,
 t – czas oprocentowania w dniach,
 T – długość roku w dniach,
 t, T – obliczone zgodnie z obranym sposobem rachunku czasu.

Przykład 5. Wpływ rachunku czasu na wartość odsetek

Środki w wysokości 40 000 zł zostały ulokowane w banku w okresie od 5 grudnia do 11 kwietnia następnego roku. Oprocentowanie wynosi 6% p.a. Przy założeniu, że luty ma 28 dni, obliczyć wartość odsetek przy różnych sposobach ich naliczania (por. tab. 12.1.). Który wariant naliczania odsetek jest najkorzystniejszy dla klienta?

Rozwiązanie:

Dla każdego sposobu naliczania odsetek określimy długość okresu oprocentowania w dniach i zastosujemy wzór (5). Przykładowo, gdy stosujemy regułę 30/360, okres oprocentowania wynosi 126 dni, a odsetki są równe:

$$I_t = K_0 \frac{r}{T} t \Rightarrow I_{126} = 40\,000 \cdot \frac{0,06}{360} \cdot 126 = 840 \text{ zł}$$

Rozwiązanie dla wszystkich rozpatrywanych możliwości jest przedstawione w tabeli 12.2.

Tabela 12.2. Wartość odsetek dla różnych sposobów ich naliczania

Konwencja naliczania odsetek	Liczba dni					Okres oproc. w dniach	Dzienna stopa procentowa	Odsetki [zł]
	gru-dzień	sty-czeń	lut-y	ma-rzec	kwie-cień			
Act/365	26	31	28	31	11	127	0,0164%	835,07
Act/360	26	31	28	31	11	127	0,0167%	846,67
30/360	25	30	30	30	11	126	0,0167%	840,00

Źródło: opracowanie własne.

Najbardziej korzystny dla klienta jest wariant drugi, czyli konwencja naliczania odsetek Act/360.

Oprocentowanie proste – stopa zmienna

Założmy, że czas oprocentowania t składa się z n po sobie następujących odcinków czasowych o długości $t_1, t_2, \dots, t_n$ (długość odcinków mierzona w okresach bazowych, $t = \sum_{j=1}^n t_j$), w których obowiązują bazowe stopy procentowe $i_1, i_2, \dots, i_n$. Wtedy:

$$K_t = K_0 (1 + i_1 t_1 + i_2 t_2 + \dots + i_n t_n) = K_0 \left(1 + \sum_{j=1}^n i_j t_j \right)$$

$$I_t = K_0 \sum_{j=1}^n i_j t_j \quad (6)$$

Wartość odsetek jest znana z góry, gdy stopy procentowe są podane na początku okresu oprocentowania – w tym przypadku klient nie ponosi ryzyka stopy procentowej. Przy zmianach stopy procentowej, na przykład w zależności od warunków rynkowych, wartość odsetek znana jest dopiero na końcu okresu oprocentowania, a klient ponosi ryzyko stopy procentowej.

Średnia stopa procentowa

Średnią bazową stopę procentową w okresie oprocentowania o długości t (mierzony w okresach bazowych) nazywamy stopę, przy której kapitał początkowy generuje w tym okresie odsetki o tej samej wartości, co zróżnicowane stopy procentowe. Stopę średnią wyznaczamy z równania (por. wzór (6)):

$$K_0 \sum_{j=1}^n \bar{i} t_j = K_0 \sum_{j=1}^n i_j t_j \quad (7)$$

skąd

$$\bar{i} = \frac{\sum_{j=1}^n i_j t_j}{t}, \text{ gdzie } t = \sum_{j=1}^n t_j$$

Średnia stopa procentowa jest przydatna m.in. w ocenie opłacalności tzw. lokat dynamicznych (progresywnych). Ich istota polega na tym, że oprocentowanie rośnie wraz z czasem trwania lokaty: w każdym kolejnym miesiącu oprocentowanie jest trochę wyższe i w ostatnim miesiącu osiąga poziom znacząco wyższy niż prze-

ciężny poziom na rynku dla lokat o tym samym terminie. Zwykle są one reklamowane jako lokaty wysoko oprocentowane, ale coraz częściej podawana jest również informacja o średnim oprocentowaniu lokaty.

Przykład 6. Kalkulacja odsetek oraz średniego oprocentowania dla lokaty progresywnej

Bank oferuje półroczną lokatę progresywną. Okres umowny rozpoczyna się z dniem otwarcia rachunku lokaty; kończy się z upływem dnia poprzedzającego dzień, który datą odpowiada początkowemu dniowi okresu umownego, a gdyby takiego dnia w ostatnim miesiącu nie było z upływem dnia poprzedzającego ostatni dzień miesiąca¹⁰. Okres naliczania odsetek jest równy okresowi umownemu. Stawki oprocentowania w poszczególnych miesiącach – w ujęciu rocznym – wynoszą odpowiednio: 0,5%; 1%; 1,5%; 2%; 3%; 4%.

Obliczyć odsetki dla lokaty w wysokości 20 000 zł otwartej 1 kwietnia oraz jej średnie oprocentowanie. Dla celów naliczania odsetek przyjmuje się, że rok liczy 365 dni.

Rozwiązanie:

Ponieważ czas oprocentowania w poszczególnych miesiącach jest wyrażony w dniach, zamiast stóp rocznych wykorzystamy stopy dzienne. Wtedy wzór (6) przyjmuje postać:

$$I_t = K_0 \sum_{i=1}^n \frac{r_j}{T} t_j$$

W tabeli 12.3. przedstawiono odsetki naliczone w poszczególnych miesiącach oraz odsetki razem za całe półrocze. Przykładowo, odsetki w kwietniu są równe $20\,000 \cdot \frac{0,5\%}{365} \cdot 30 = 8,22$ zł.

Równanie (7) w naszym przypadku przyjmuje postać:

$$K_0 \sum_{i=1}^n \frac{\bar{r}}{T} t_j = K_0 \sum_{i=1}^n \frac{r_j}{T} t_j$$

¹⁰ Posłużono się definicją okresu umownego dla lokat progresywnych stosowaną w praktyce – por. na przykład Regulamin rachunków oszczędnościowych lokat terminowych Banku Pekao SA, https://www.pekao24.pl/MCP/html/PL/regulamin_lokat.html, dostęp: 26.03.2015.

skąd

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^n r_i t_i}{t} = \frac{3,66}{183} = 2\%$$

Tabela 12.3. Odsetki dla półrocznej lokaty progresywnej

Miesiąc	Kwiecień	Maj	Czerwiec	Lipiec	Sierpień	Wrzesień	Razem
Stopa procentowa r_j	0,5%	1,0%	1,5%	2,0%	3,0%	4,0%	
Liczba dni w miesiącu t_j	30	31	30	31	31	30	183
$r_i t_j$	0,15	0,31	0,45	0,62	0,93	1,20	3,66
Odsetki [zł]	8,22	16,99	24,66	33,97	50,96	65,75	200,55

Źródło: opracowanie własne.

Średnie oprocentowanie lokaty wyrażone w skali rocznej wynosi 2%, zatem „zwykła” półroczna lokata o oprocentowaniu 2% p.a. przyniosłaby w tym okresie odsetki o tej samej wartości co rozpatrywana lokata progresywna.

Oprocentowania składane – stopa stała

Podstawową cechą odróżniającą oprocentowanie proste od złożonego jest założenie o reinwestowaniu odsetek. Założmy najpierw, że okres oprocentowania jest wielokrotnością okresu bazowego a odsetki są kapitalizowane na koniec każdego okresu bazowego. Przy stosowaniu tych samych oznaczeń, co w schemacie oprocentowania prostego, kapitał końcowy na końcu pierwszego okresu oblicza się według wzoru:

$$K_1 = K_0 + i K_0 = K_0 (1 + i)$$

W drugim okresie bazowym podstawą do naliczenia odsetek jest kapitał K_1 z końca pierwszego okresu. Wzór do obliczania kapitału na końcu drugiego okresu bazowego przyjmuje postać:

$$K_2 = K_1 + i K_1 = K_1 (1 + i) = K_0 (1 + i)^2$$

Gdy przeprowadzimy analogiczne rozumowanie dla kolejnych okresów, na końcu n -tego okresu bazowego otrzymujemy kapitał końcowy:

$$K_n = K_0 (1 + i)^n \tag{8}$$

oraz odsetki

$$I_n = K_0 \left((1+i)^n - 1 \right) \quad (9)$$

Zauważmy, że każdy kolejny wyraz ciągu (K_n) , $n = 0, 1, 2, \dots$, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez czynnik $(1+i)$. Oznacza to, że ciąg (K_n) jest ciągiem geometrycznym o wyrazie początkowym K_0 oraz ilorazie $(1+i)$, a więc wartość kapitału końcowego rośnie wraz z czasem w postępie geometrycznym dla $i > 0$, pozostaje na tym samym poziomie dla $i = 0$ i maleje dla $i \in (-1, 0)$.

Przykład 7. Naliczanie odsetek według zasady oprocentowania złożonego

Obliczyć wartość kapitału końcowego oraz odsetki dla 90-dniowej lokaty w wysokości 10 000 zł, przy kapitalizacji 10-dniowej, jeżeli stopa procentowa okresu bazowego (10 dni) wynosi 0,5%.

Rozwiązanie:

Zastosujemy wzory (8), (9) dla $K_0 = 10\,000$, $n = 9$ oraz $i = 0,5\%$.

$$K_9 = 10\,000 (1 + 0,005)^9 = 10\,459,11 \text{ zł}$$

$$I_9 = 10\,459,11 - 10\,000 = 459,11 \text{ zł}$$

Wartość kapitału końcowego wynosi 10 459,11 zł, a odsetki są równe 459,11 zł.

Kapitalizacja odsetek m razy w roku

Żałóżmy, że kapitalizacja odsetek następuje m razy w roku (m jest liczbą naturalną), wszystkie okresy kapitalizacji są tej samej długości oraz okres oprocentowania wynosi jeden rok. Przy danej rocznej stopie procentowej r , wartość końcowa kapitału na koniec m -tego okresu kapitalizacji wyraża się wzorem:

$$K_m = K_0 \left(1 + \frac{r}{m} \right)^m \quad (10)$$

Zwróćmy uwagę, że wzór (10) jest szczególnym przypadkiem wzoru (8). Okres kapitalizacji, $1/m$ roku, jest równy okresowi bazowemu, okresem oprocentowania jest jeden rok, a czas jest mierzony w okresach bazowych. Oczywiście, okresem oprocentowania może być dowolny inny okres, który jest wielokrotnością okresu kapitalizacji. Stopę r w tym kontekście przyjęło się nazywać stopą nominalną.

Najczęściej kapitalizacji dokonuje się dwanaście razy w roku ($m = 12$), cztery razy w roku ($m = 4$) lub dwa razy w roku ($m = 2$) i mówi się odpowiednio o kapitalizacji miesięcznej, kwartalnej lub półrocznej. Wymienione okresy kapita-

lizacji składają się z pełnej liczby dni przy stosowaniu roku o długości 360 dni. Dla roku o 365 dniach, przy kapitalizacji miesięcznej okres kapitalizacji wynosi $30\frac{5}{12}$ dnia, przy kwartalnej 91,25 dnia a przy kapitalizacji półrocznej 182,5 dnia.

Dla ustalonej nominalnej stopy oprocentowania r ($r > -1$, $r \neq 0$) oraz dla dowolnej liczby naturalnej m prawdziwa jest nierówność¹¹

$$K_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m < K_0 \left(1 + \frac{r}{m+1}\right)^{m+1}$$

co oznacza, że im częstsza kapitalizacja odsetek, tym większa wartość kapitału końcowego.

Przykład 8. Wpływ częstości kapitalizacji odsetek oraz stopy procentowej na wartość końcową kapitału

Klient ma zamiar za rok kupić nowy samochód. W tej chwili dysponuje kwotą 50 000 zł i postanowił je ulokować w formie lokaty bankowej. Rozważa dwie oferty:

- lokata roczną o oprocentowaniu nominalnym 6% p.a. z półroczną kapitalizacją odsetek,
- lokata roczną o oprocentowaniu nominalnym 5,75% p.a. z miesięczną kapitalizacją odsetek.

Która z tych dwóch lokat przyniesie większe odsetki?

Rozwiązanie:

$$\text{a) } K_2 = 50\,000 \left(1 + \frac{0,06}{2}\right)^2 = 53\,045 \text{ zł}, \quad I_2 = K_2 - K_0 = 3\,045 \text{ zł}$$

$$\text{b) } K_{12} = 50\,000 \left(1 + \frac{0,0575}{12}\right)^{12} = 52\,951,99 \text{ zł}, \quad I_{12} = K_{12} - K_0 = 2\,951,99 \text{ zł}$$

Lokata roczna z półroczną kapitalizacją odsetek przyniesie klientowi większe odsetki.

¹¹ Dla dodatniej stopy procentowej por. Podgórska M., Klimkowska J., op. cit., s. 81; dla ujemnej stopy por. Głowacki P., *Analiza matematyczna I B*, s. 3, <http://www.math.uni.wroc.pl/~glowacki/analizaB/wyklad03.pdf>, dostęp: 29.04.2015.

Model oprocentowania składanego (wzory (8), (9)) uogólnia się dla ciągłej zmiennej czasowej, $t \in R^+$, gdzie R^+ oznacza zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych, czyli $R^+ = [0, \infty)$ w następujący sposób:

$$K_t = K_0 (1 + i)^t \quad (11)$$

$$I_t = K_0 ((1 + i)^t - 1)$$

Końcowa wartość kapitału K_t jest iloczynem kapitału początkowego K_0 i funkcji wykładniczej o podstawie $(1 + i)$ czasu oprocentowania t , gdzie i jest stopą procentową okresu bazowego i czas t jest mierzony w okresach bazowych. Wartość kapitału K_t jest rosnącą funkcją czasu dla $i > 0$, funkcją malejącą dla $i \in (-1, 0)$ oraz funkcją stałą dla $i = 0$. Zauważmy, że przy przyjętych przez nas założeniach ($K_0 > 0$, $i > -1$) wartość kapitału końcowego będzie dodatnia dla dowolnego $t \in R^+$.

Oprocentowania składane – stopa zmienna

Żałómy, że czas oprocentowania t składa się z n po sobie następujących odcinków czasowych o długości $t_1, t_2, \dots, t_n$ (długość odcinków mierzona w okresach bazowych, $t = \sum_{j=1}^n t_j$), w których obowiązują bazowe stopy procentowe $i_1, i_2, \dots, i_n$. Wtedy wartość kapitału końcowego oraz odsetek wygenerowanych w czasie t wyraża się wzorami:

$$K_t = K_0 \prod_{j=1}^n (1 + i_j)^{t_j} \quad (12)$$

$$I_t = K_0 \left(\prod_{j=1}^n (1 + i_j)^{t_j} - 1 \right) \quad (13)$$

W zależności od kształtowania się stóp procentowych w okresach bazowych, wartość kapitału końcowego może być większa, mniejsza lub równa wartości kapitału początkowego.

Średnia stopa procentowa

W modelu oprocentowania złożonego średnia bazowa stopa procentowa w okresie o długości t jest zdefiniowana analogicznie jak w modelu oprocentowania prostego, zatem jest to stopa $\bar{i}$, przy której kapitał początkowy generuje w tym okresie odsetki o tej samej wartości, co zróżnicowane stopy procentowe. Średnią bazową stopę procentową $\bar{i}$ wyznaczamy więc z równania (por. wzór (13)):

$$K_0 \left((1 + \bar{i})^t - 1 \right) = K_0 \left(\prod_{j=1}^n (1 + i_j)^{t_j} - 1 \right)$$

skąd

$$\bar{i} = \sqrt[t]{\prod_{j=1}^n (1 + i_j)^{t_j}} - 1 \quad (14)$$

Przykład 9. Kalkulacja kapitału końcowego oraz średniej stopy procentowej według zasady oprocentowania złożonego

Obliczyć wartość kapitału końcowego dla lokaty w wysokości 10 000 zł, o terminie dwa lata i 120 dni, przy rocznej kapitalizacji odsetek oraz

- stopie procentowej 10% p.a.
- stopie procentowej 10% p.a. w pierwszym roku a w pozostałej części okresu oprocentowanej 12% p.a.

W przypadku b) obliczyć średnią roczną stopę procentową.

Przyjąć długość roku 365 dni.

Rozwiązanie:

- Długość okresu oprocentowania wyrażona w latach jest równa:

$$\left(\frac{2 \cdot 365 + 120}{365} \right) = \frac{850}{365} \approx 2,33$$

Stosując wzór (11), otrzymujemy:

$$K_{\frac{850}{365}} = 10\,000 (1 + 10\%)^{\frac{850}{365}} = 12\,485,15 \text{ zł}$$

Wartość kapitału końcowego przy oprocentowaniu stałym w wysokości 10% p.a. w okresie oprocentowania wyniesie 12 485,15 zł.

- W pierwszym roku obowiązuje roczna stopa procentowa w wysokości 10%, a w drugim okresie o długości 1,33 roku ($485/365$) roczna stopa procentowa w wysokości 12%.

Wykorzystamy wzór (12):

$$K_{\frac{850}{365}} = 10\,000 (1 + 0,1)^1 (1 + 0,12)^{\frac{485}{365}} = 12\,787,69 \text{ zł}$$

Wartość kapitału końcowego przy oprocentowaniu w wysokości 10% p.a. w pierwszym roku, a oprocentowaniu 12% p.a. w drugiej części okresu oprocentowania wyniesie 12 787,69 zł.

Średnią stopę procentową obliczymy ze wzoru (14):

$$\bar{r} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n (1+r_j)^{t_j}} - 1 = \sqrt[365]{(1+0,1)^1 \cdot (1+0,12)^{485}} - 1 = 11,137\%$$

Lokata o oprocentowaniu 11,137% p.a. przyniesie w czasie dwóch lat i 120 dni takie same odsetki jak lokata, której oprocentowanie w pierwszym roku wynosi 10% p.a. a w drugiej części okresu 12% p.a.

Porównanie odsetek w modelach oprocentowania prostego oraz składanego

Przy tej samej wartości stawki procentowej $i > -1$, $i \neq 0$ przyrost odsetek w modelu oprocentowania złożonego jest szybszy niż w modelu oprocentowania prostego dla czasu oprocentowania większego od jedności, a wolniejszy dla czasu oprocentowania mniejszego od jedności. Wynika to z prawdziwości nierówności $(1+i)^t > (1+i t)$ dla $t > 1$ oraz $(1+i)^t < (1+i t)$ dla $t \in (0,1)$. Dla $t = 1$ odsetki proste są równe odsetkom złożonym.

Stopa efektywna

Wartość kapitału końcowego zależy od wielu czynników, takich jak schemat naliczania odsetek (oprocentowanie proste, złożone), częstotliwość kapitalizacji, kształtowanie się stóp procentowych w okresie oprocentowania, co utrudnia ich porównywanie. W celu porównania różnych warunków oprocentowania (w tym samym okresie oprocentowania), potrzebna jest miara pozwalająca na ich uporządkowanie z punktu widzenia uzyskiwanych korzyści finansowych. Taką miarą jest tzw. stopa efektywna i_{ef} , która oznacza, o ile procent zwiększa się wartość kapitału w ciągu okresu oprocentowania. Stopa efektywna pozwala uporządkować różne sposoby kalkulacji kapitału końcowego ze względu na uzyskane korzyści finansowe: im większa efektywna stopa procentowa, tym większa korzyść finansowa.

Przykładowo, w przypadku kapitalizacji odsetek m razy w roku (wzór (10)), roczną efektywną stopę procentową r_{ef} wyznaczymy z równania:

$$K_0(1+r_{ef}) = K_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

Stąd

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$$

Oprocentowanie mieszane

W praktyce bankowo-finansowej spotykamy się również z sytuacją, w której okresy kapitalizacji odsetek nie są równej długości. Z takimi przypadkami mamy do czynienia na przykład wtedy, gdy odsetki są kapitalizowane miesięcznie (kwartalnie, półrocznie ...) z uwzględnieniem faktycznej, pełnej liczby dni.

Jeżeli czas oprocentowania t składa się z n odcinków czasowych o długościach $t_1, t_2, \dots, t_n$ wyrażonych w dniach ($t = \sum_{j=1}^n t_j$), w których obowiązują roczne stopy procentowe $r_1, r_2, \dots, r_n$, odsetki są kapitalizowane na końcu poszczególnych odcinków czasowych, a rok ma T dni, to do obliczenia wartości kapitału na końcu n -tego odcinka (to jest po t dniach) stosujemy wzór:

$$K_t = K_0 \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{r_j}{T} t_j\right) \quad (15)$$

Nazwa oprocentowanie mieszane odnosi się do faktu, że odsetki są kapitalizowane na koniec poszczególnych okresów, a w trakcie okresów naliczane są według schematu oprocentowania prostego.

Przykład 10. Miesięczna kapitalizacja odsetek z uwzględnieniem faktycznej liczby dni

Bank^{12, 13} oferuje lokatę 3-miesięczną z miesięczną kapitalizacją odsetek. Okres umowny rozpoczyna się z dniem otwarcia rachunku lokaty; kończy się z upływem dnia poprzedzającego dzień, który datą odpowiada początkowemu dniowi okresu umownego, a gdyby takiego dnia w ostatnim miesiącu nie było z upływem dnia poprzedzającego ostatni dzień miesiąca. Okres naliczania odsetek jest równy okresowi umownemu. Odsetki powiększają kapitał lokaty i są dopisywane po upływie każdego pełnego miesiąca trwania lokaty. Udostępnienie kwoty lokaty wraz z naliczonymi odsetkami następuje po zakończeniu okresu umownego. Oprocentowanie lokaty wynosi 2% p.a. w pierwszym miesiącu, 3% p.a. w drugim oraz 5% p.a.

¹² Lokata Powitalna 123. http://static3.bzwbk.pl/asset/r/e/g/regulamin-lokata-123_30682.pdf

¹³ Oprocentowanie dla Ciebie. Lokaty terminowe. <http://www.bzwbk.pl/przydatne-informacje/oprocentowanie/klienci-indywidualni/oprocentowanie-dla-ciebie.html#lokaty>, dostęp: 15.03.2015.

w trzecim miesiącu trwania lokaty. Dla celów naliczania odsetek przyjmuje się, że rok liczy 365 dni.

Rachunek lokaty w wysokości 10 000 zł otwarto 1 lutego 2015 roku. Obliczyć wartość kapitału końcowego oraz odsetki po zakończeniu okresu umownego.

Rozwiązanie:

Podstawiając do wzoru (15)

$$K_0 = 10\,000, r_1 = 2\%, r_2 = 3\%, r_3 = 5\%, t_1 = 28, t_2 = 31, t_3 = 30, t = 89$$

otrzymujemy

$$K_{89} = 10\,000 \left(1 + \frac{0,02}{365} \cdot 28 \right) \left(1 + \frac{0,03}{365} \cdot 31 \right) \left(1 + \frac{0,05}{365} \cdot 30 \right) = 10\,082,12 \text{ zł}$$

Wartość końcowa lokaty wyniesie 10 082,12 zł, a odsetki, obliczone jako różnica $K_{89} - K_0$, wyniosą 82,12 zł.

Dyskontowanie - operacja odwrotna do oprocentowania

Obliczanie wartości kapitału początkowego na podstawie znanej wartości kapitału końcowego, nazywa się dyskontowaniem¹⁴ a kwotę o jaką należy pomniejszyć kapitał końcowy, aby otrzymać kapitał początkowy, nazywamy dyskontem D .

Dyskontowanie proste

Wychodząc ze wzoru (3), określającego wartość końcową kapitału w schemacie oprocentowania prostego, otrzymujemy model dyskontowania prostego:

$$K_0 = \frac{K_t}{1 + i t} \quad (16)$$

$$D = \frac{K_t i t}{1 + i t}$$

gdzie dyskonto zostało obliczone jako: $D = K_t - K_0 = K_t - \frac{K_t}{1 + i t} = \frac{K_t i t}{1 + i t}$

¹⁴ Nazywane również dyskontowaniem matematycznym lub rzeczywistym, w odróżnieniu od dyskontowania handlowego, w którym dyskonto jest obliczane od wartości końcowej przy użyciu stopy dyskontowej.

Dyskontowanie składane

Model dyskontowania składanego otrzymujemy, wychodząc ze wzoru (11), określającego model oprocentowania składanego:

$$K_0 = \frac{K_t}{(1+i)^t} \quad (17)$$

a dyskonto D obliczamy jako:

$$D = K_t - K_0 = K_t - \frac{K_t}{(1+i)^t} = K_t \left(1 - \frac{1}{(1+i)^t} \right)$$

Przykład 11. Dyskontowanie proste

Bank wyemitował 100-dniowe certyfikaty depozytowe oprocentowane 7,2% p.a. Jaką kwotę zdeponował klient u emitenta, jeżeli po upływie daty zapadalności, certyfikat został wykupiony za 25 500 zł. Zakładamy, że odsetki są naliczane wg schematu oprocentowania prostego oraz reguły Act/360.

Rozwiązanie:

Wykorzystując wzór (16), otrzymujemy:

$$K_0 = \frac{K_t}{1 + \frac{r}{T}t} = \frac{25\,500}{1 + \frac{0,072}{360} \cdot 100} = 25\,000 \text{ zł}$$

Klient zdeponował u emitenta 25 000 zł.

12.2. Wartość kapitału w czasie

Stwierdzenie, że wartość kapitału zmienia się w czasie nie budzi wątpliwości. Posiadanie 1000 złotych dzisiaj nie jest tym samym, co posiadanie 1000 złotych 5 lat temu, lub posiadanie 1000 złotych za rok.

Aktualizacja wartości kapitału

Wartość kapitału odnosi się zawsze do określonego momentu czasu. W matematyce finansowej zasada ścisłego związku kapitału z czasem jest rygorystycznie przestrzegana. Bez sprowadzenia wartości kapitałów odnoszących się do różnych momentów czasowych na jeden wspólny moment, nie jest możliwe ich porównywanie,

ani dodawanie czy odejmowanie. Obliczenie wartości kapitału, znanego w danym momencie, w dowolnym innym momencie, nosi nazwę aktualizacji wartości kapitału.

Ograniczymy się do przedstawienia kilku podstawowych pojęć¹⁵, które będziemy wykorzystywać w opisie systematycznego oszczędzania oraz schematów spłaty długu.

Kapitał rozpatrujemy jako funkcję ciągłej zmiennej czasowej $t, t \in R$; R oznacza zbiór liczb rzeczywistych, to jest $R = (-\infty, +\infty)$. Wartość kapitału K w momencie t będziemy oznaczali $K(t)$. Zakładamy, że znana jest wartość kapitału w momencie t_0 , $K(t_0)$, oraz że $K(t_0) > 0$. W celu aktualizacji kapitału na dowolny moment t późniejszy niż t_0 ($t > t_0$), wykorzystamy model oprocentowania składanego (por. wzór (11)), a na moment wcześniejszy niż t_0 ($t < t_0$), model dyskontowania składanego (por. wzór (17)). Zaktualizowaną wartość kapitału $K(t_0)$ na dowolny moment $t \in R$ można zapisać jednym wzorem:

$$K(t) = K(t_0)(1+i)^{t-t_0}$$

Dla stopy bazowej $i > -1$, $i \neq 0$ ¹⁶, funkcja $K(t)$ jest funkcją wykładniczą czasu t : rosnąca dla $i > 0$, a malejąca dla $i \in (-1, 0)$.

W teorii wartości kapitału w czasie na ogół przyjmuje się, że bazowa stopa procentowa przyjmuje wartości dodatnie, co jest odzwierciedleniem przekonania, że „1000 złotych dzisiaj jest więcej warte niż 1000 złotych otrzymanych za rok”. K. Jajuga¹⁷ wymienia kilka podstawowych powodów uzasadniających to podejście: spadek siły nabywczej pieniądza w wyniku inflacji, możliwość inwestowania, występowanie ryzyka oraz przedkładanie bieżącej konsumpcji nad przyszłą konsumpcję.

W świetle deflacji, niskich lub ujemnych rynkowych stóp procentowych, niepewności na rynkach, nieprzewidywalnych kursów walut, konfliktów zbrojnych itp. założenie, że 1000 zł otrzymanych dzisiaj ma większą wartość niż 1000 zł otrzymanych za rok, przestaje być oczywiste, dlatego też w tej części rozważań pozostawiliśmy słabsze założenie dotyczące bazowej stopy procentowej, to jest $i > -1$, $i \neq 0$.

Zasada równoważności kapitałów

Zasada równoważności kapitałów jest jedną z najważniejszych zasad matematyki finansowej. Sformułowana jest w następujący sposób: kapitały K^A , K^B są

¹⁵ Pogłębione informacje znajdują się np. w książce Podgórska M., Klimkowska J., op. cit., s. 120–151.

¹⁶ Dla $i = 0$ funkcja $K(t)$ jest funkcją stałą.

¹⁷ Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006, s. 80.

równoważne, jeśli ich wartości zaktualizowane na jakikolwiek moment $t \in R$ są sobie równe.

Rozszerzeniem tej zasady jest zasada równoważności kapitału i ciągu kapitałów: mówimy, że kapitał K jest równoważny ciągowi kapitałów $(M_j), j = 1, 2, \dots, n$, jeżeli w dowolnym momencie $t \in R$ suma zaktualizowanych wartości kapitałów (M_j) jest równa zaktualizowanej wartości kapitału K , to jest w dowolnym momencie t spełniona jest równość:

$$K(t) = \sum_{j=1}^n M_j(t) \quad (18)$$

12.3. Systematyczne oszczędzanie

Ciąg płatności dokonywanych w regularnych, równych odstępach czasu (okresy bazowe) nazywa się w matematyce finansowej rentą. Momentem początkowym renty jest moment $t = 0$, a momentem końcowym, koniec okresu, za który dokonano ostatniej płatności. Renty mogą się różnić wieloma charakterystykami, na przykład częstotliwością oraz wartością poszczególnych płatności, stopą procentową okresu bazowego, terminem dokonywania płatności (początek lub koniec okresu bazowego) itp. Teoria rent stanowi odrębny, ważny dział matematyki finansowej, gdyż z zagadnieniami związanymi z rentami często spotykamy się w praktyce. Przykładem renty mogą być wypłaty comiesięcznej pensji, płacenie czynszu za wynajem mieszkania, dokonywanie opłat za przedszkole dziecka, systematyczne oszczędzanie itp. W rozdziale ograniczymy się do przedstawienia niektórych kwestii związanych z systematycznym oszczędzaniem.

Konieczność systematycznego oszczędzania, budowania „poduszki finansowej”, jest jedną z podstawowych reguł finansów osobistych. Reguła ta znana jest też pod nazwą „Zapłać najpierw sobie”, co oznacza, że po otrzymaniu pensji w pierwszej kolejności odkładamy określoną kwotę na rachunek oszczędnościowy, a dopiero potem opłacamy wszystkie swoje rachunki i inne zobowiązania.

Założmy, że na rachunek oszczędnościowy wpłacamy systematycznie, w regularnych odstępach czasu kwotę V . Kwoty są wpłacane na początku każdego z n okresów bazowych, odsetki są kapitalizowane na końcu każdego okresu przy stopie bazowej równej i , $i > 0$. Pierwsza wpłata „pracuje” przez n okresów i, zgodnie z zasadą oprocentowania złożonego, jej wartość końcowa wyniesie $V(1+i)^n$, druga wpłata „pracuje” przez $(n-1)$ okresów, zatem jej wartość końcowa wyniesie $V(1+i)^{n-1}$, itd. Ostatnia wpłata, wniesiona na początek n -tego okresu, będzie

miała wartość końcową $V(1+i)$. Zatem wartość końcowa F wszystkich płatności, które zostały wpłacone w ciągu całego okresu oszczędzania, wyraża się wzorem:

$$F = \sum_{j=0}^{n-1} V(1+i)^{n-j} = V(1+i)^n \sum_{j=0}^{n-1} (1+i)^{-j} \quad (19)$$

Wartość końcowa F jest sumą wszystkich płatności zaktualizowanych na moment n i jest tym większa im większa jest systematyczna wpłata V , im dłuższy jest okres oszczędzania oraz im wyższe jest oprocentowanie rachunku oszczędnościowego.

Wartość początkową P wszystkich płatności (sumę wszystkich płatności zaktualizowanych na moment $t=0$) obliczamy ze wzoru:

$$P = \sum_{j=0}^{n-1} V(1+i)^{-j} \quad (20)$$

Dla $i \neq 0$ wzory (19), (20) można zapisać w równoważnej postaci¹⁸:

$$F = V(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad (21)$$

$$P = V(1+i) \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \quad (22)$$

Systematyczne oszczędzanie na emeryturę

Prognozy co do kształtowania się wysokości przyszłych emerytur nie są optymistyczne. Wskaźnik zastąpienia, czyli relacja przeciętnej emerytury do przeciętnego miesięcznego wynagrodzenia, który w 2012 roku kształtował się w Polsce na poziomie 48,8% (w ujęciu brutto)¹⁹, może – według prognoz Komisji Europejskiej²⁰ – w 2060 r. spaść do poziomu 22%, co oznacza, że pierwsza emerytura będzie warta jedynie jedną piątą ostatniego wynagrodzenia. Jednocześnie z badań Fundacji Kronenberga wynika, że tylko 16% Polaków oszczędza z myślą o emery-

¹⁸ Wykorzystując wzór na sumę pierwszych n wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ilorazie $q = (1+i)^{-1}$ przy założeniu $i \neq 0$

¹⁹ Gross pension replacement rates (indicator). OECD (2015), <https://data.oecd.org/pension/gross-pension-replacement-rates.htm>, dostęp: 3.07.2015

²⁰ The 2012 Ageing Report Economic and budgetary projections for the 27 EU Member States (2010–2060) European Economy 2/2012, s. 129, http://ec.europa.eu/economy_finance/publications/european_economy/2012/pdf/ee-2012-2_en.pdf, dostęp: 3.07.2015.

turze²¹. Tymczasem regularne odkładanie nawet niewielkich kwot w perspektywie kilkudziesięciu lat może przynieść znaczące oszczędności.

Przykłady 12, 13 obrazują związek między wysokością prywatnej emerytury a długością okresu oszczędzania oraz oprocentowaniem rachunku oszczędnościowego.

Przykład 12. Wpływ długości okresu systematycznego oszczędzania oraz oprocentowania rachunku na wartość zgromadzonej kwoty

Pan Kowalski postanowił oszczędzać na dodatkową emeryturę: na początku każdego miesiąca wpłaca 300 zł na rachunek oszczędnościowy. Jaką kwotą będzie dysponować pan Kowalski w wieku 67 lat, jeżeli zacznie oszczędzać w wieku a) 30; b) 40; c) 50; d) 60 lat zakładając różne warianty oprocentowania rachunku oszczędnościowego: 2% p.a.; 4% p.a. oraz 6% p.a. Obliczenia przeprowadzić bez uwzględnienia oraz z uwzględnieniem podatku od zysków kapitałowych.

Rozwiązanie:

Do obliczenia zgromadzonej kwoty bez uwzględnienia podatku od zysków kapitałowych skorzystamy ze wzoru (21), wyrażając długość okresu oszczędzania w miesiącach oraz stopę oprocentowania i w skali miesięcznej. Uwzględnienie podatku od zysków kapitałowych – zakładając, że jest on odprowadzany co miesiąc – sprowadza się do zastosowania we wzorze (21) stopy $i^* = 0,81i$ zamiast stopy i , gdyż podatek od zysków kapitałowych, nazywany popularnie podatkiem Belki, wynosi w Polsce 19%.

Przykładowo, gdy pan Kowalski rozpocznie oszczędzanie w wieku 30 lat, okres oszczędzania wyniesie 37 lat, czyli 444 miesiące. Przy oprocentowaniu rachunku oszczędnościowego w wysokości 6% p.a. (0,5% w skali miesięcznej) zebrana na koniec okresu kwota wyniosłaby:

$$F = V(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 300(1+0,005) \frac{(1+0,005)^{444} - 1}{0,005} = 491\,839,39 \text{ zł}$$

Uwzględniając podatek od zysków kapitałowych, kwota zgromadzona na koniec okresu oszczędzania byłaby równa:

$$F = V(1+i^*) \frac{(1+i^*)^n - 1}{i^*} = 300(1+0,005 \cdot 0,81) \frac{(1+0,005 \cdot 0,81)^{444} - 1}{0,005 \cdot 0,81} = 373\,125,62 \text{ zł}$$

²¹ Postawy Polaków wobec oszczędzania, raport Fundacji Kronenberga przy Citi Handlowy, PBS, październik 2014, http://www.citibank.pl/poland/kronenberg/polish/files/fk_oszcz_2014.pdf, dostęp: 3.07.2015.

Rozwiązanie dla wszystkich wymienionych w zadaniu wariantów (po zaokrągleniu do pełnych złotych) przedstawia tabela 12.4.

Tabela 12.4. Zgromadzona kwota oszczędności [zł]

Długość okresu oszczędzania w latach	Oprocentowanie rachunku oszczędnościowego					
	2% p.a.		4% p.a.		6% p.a.	
	bez podatku	z podatkiem	bez podatku	z podatkiem	bez podatku	z podatkiem
37	197 364	182 533	305 408	257 447	491 839	373 126
27	128 957	121 991	175 127	155 482	243 174	201 145
17	72 940	70 498	87 740	81 704	106 499	95 259
7	27 070	26 701	29 123	28 320	31 378	30 067

Źródło: opracowanie własne.

Przykład 13. Wpływ długości okresu oszczędzania oraz oprocentowania rachunku na wysokość prywatnej emerytury

Na podstawie danych w tabeli 12.4. określić, na jaką dodatkową emeryturę będzie mógł sobie pozwolić pan Kowalski w każdym z rozpatrywanych wariantów, przy założeniu pobierania emerytury do 90. roku życia oraz obowiązku odprowadzania podatku od zysków kapitałowych.

Rozwiązanie:

Zgromadzone oszczędności traktujemy teraz jako wartość początkową ciągu wypłat o stałej wysokości V . Wartość V wyznaczymy ze wzoru (22), zastępując stopę i stopą i^* :

$$V = \frac{Pi^*}{(1+i^*) \left(1 - (1+i^*)^{-n}\right)} \tag{23}$$

Przykładowo, gdy pan Kowalski będzie oszczędzać przez 37 lat, na rachunku oprocentowanym 4% w skali rocznej zgromadzi kwotę 257 447 zł (z uwzględnieniem podatku od zysków kapitałowych). Oznacza to, że do 90 roku życia (przez 23 lata, czyli 276 miesięcy) będzie mógł sobie wypłacać prywatną miesięczną emeryturę w wysokości 1321 zł. Została ona obliczona ze wzoru (23) dla $P = 257\,447$

$$\text{zł, } i^* = 0,81 \cdot \frac{4\%}{12} = 0,27\%, n = 276:$$

$$V = \frac{257\,447 \cdot 0,0027}{(1 + 0,0027) \cdot \left(1 - (1 + 0,0027)^{-276}\right)} = 1\,321 \text{ zł}$$

Wartość miesięcznych wypłat (zaokrąglonych do pełnych złotych) w każdym z rozpatrywanych przypadków przedstawia tabela 12.5.

Tabela 12.5. Miesięczne wypłaty środków zgromadzonych na emeryturę [zł]

Długość okresu oszczędzania w latach	Oprocentowanie rachunku oszczędnościowego		
	2% p.a.	4% p.a.	6% p.a.
37	792	1 321	2 239
27	529	798	1 207
17	306	419	572
7	116	145	180

Źródło: opracowanie własne.

12.4. Spłata długu

Będziemy się opierać na koncepcji ratalnej spłaty długu, szczegółowo opisanej na przykład w podręczniku M. Podgórskiej oraz J. Klimkowskiej²², która traktuje udzielenie kredytu lub pożyczki jako szczególny przypadek inwestycji finansowej, w której inwestorem jest strona udzielająca kredytu lub pożyczki, a raty spłaty długu stanowią ciąg zwrotów z tej inwestycji, co pozwala zastosować do analizy spłat długu ogólne pojęcia i metody służące do analizy inwestycji finansowych: model oprocentowania składanego, model wartości kapitału w czasie, zasadę równoważności kapitałów itd.

Długiem nazywamy kapitał S_0 , przekazany przez wierzyciela w momencie 0 dłużnikowi. Przyjmijmy następujące założenia:

- Dłużnik spłaca dług w n ratach R_j , $R_j \geq 0$, w równo oddalonych momentach czasowych $j = 1, 2, \dots, n$.
- Okresy między kolejnymi momentami $j = 0, 1, 2, \dots, n$ nazywamy okresami bazowymi.
- Raty R_j dla $j = 1, 2, \dots, n$ obejmują zwrot pożyczonego kapitału wraz z naliczonymi odsetkami, ale nie obejmują żadnych innych opłat.
- Stopa okresu bazowego jest równa i ; $i > 0$.

²² Podgórska M., Klimkowska J., op. cit., s. 183–223.

Dalsze rozważania przeprowadzimy przy założeniu dodatniej stopy procentowej okresu bazowego. Założenie o ujemnej stopie bazowej w całym okresie obowiązywania umowy oznacza, że dłużnik oddaje mniej, niż pożyczył.

Opinie w sprawie stosowania ujemnego oprocentowania pożyczki lub kredytu są zróżnicowane: według niektórych, stosowanie ujemnego oprocentowanie nie jest możliwe, gdyż zgodnie z definicją umowy kredytowej²³, kredytobiorca zobowiązany jest do zwrotu kwoty wykorzystanego kredytu wraz z odsetkami, co oznacza, że kredytobiorca ponosi koszty w postaci odsetek. Definicja pożyczki²⁴ zaś nie przewiduje oddania kwoty mniejszej od pożyczonej. Według innych opinii²⁵, stosowanie ujemnych stóp do obliczania pojedynczych rat kredytu nie jest sprzeczne z prawem bankowym, pod warunkiem, że kwota całkowitej spłaty kredytu będzie równa kwocie wypłaconego kredytu powiększonej o odsetki.

Z problemem uwzględniania ujemnej stawki Libor oraz ujemnego oprocentowania w naliczaniu odsetek musiały się zmierzyć banki w Polsce, które udzielały mieszkaniowych kredytów hipotecznych w CHF o zmiennym oprocentowaniu opartym na formule „Libor + marża” – syntetyczną informację o sposobie podejścia do tego problemu przez poszczególne banki publikuje na swoich stronach internetowych Urząd Ochrony Konkurencji i Konsumentów²⁶.

Zasada równoważności długu i rat

W analizie schematów spłat długu ważną rolę odgrywa zasada równoważności długu i spłat (por. wzór (18)): dług o wartości S_0 w momencie 0 jest równoważny ciągowi rat o wartości R_j płatnych w momentach $j = 1, 2, \dots, n$, jeśli kapitały przekazane przez wierzyciela i dłużnika są równoważne. Aktualizując wartość długu i rat na moment j , $j = 0, 1, 2, \dots, n$, otrzymujemy warunek równoważności długu i rat w postaci:

$$S_0 (1+i)^j = \sum_{m=1}^n R_m (1+i)^{j-m} \quad (24)$$

Dla momentu początkowego $j = 0$ wzór (24) przybiera postać:

$$S_0 = \sum_{m=1}^n R_m (1+i)^{-m} \quad (25)$$

²³ Ustawa z dnia 29 sierpnia 1997 r., Prawo bankowe, Dz.U. 1997 Nr 140, poz. 939, art. 69.1.

²⁴ Ustawa z dnia 23 kwietnia 1964 r., Kodeks cywilny, Dz.U. 1964 Nr 16, poz. 93, art. 720, § 1.

²⁵ Korpalski M., *Co z tym Libor*, <http://law24.pl/1292rzeczpospolita-tym-libor/>, dostęp 24.04.2015.

²⁶ Zestawienie informacji o warunkach spłaty kredytów hipotecznych wyrażonych w CHF (30.03.2015-03.04.2015), https://uokik.gov.pl/aktualnosci.php?news_id=11578, dostęp: 24.04.2015.

Schemat spłaty długu

Zarówno z punktu widzenia dłużnika, jak i wierzyciela, ważna jest informacja o długu bieżącym S_j w momencie j (wartość kapitału pozostającego do spłaty po zapłaceniu raty R_j) oraz o wartości i strukturze j -tej raty $R_j, j = 1, 2, \dots, n$. Dług bieżący w momencie 0 jest równy S_0 , a w momencie n , czyli po zapłaceniu ostatniej raty, jest równy 0.

Przy założeniu równoważności długu i spłat, dług bieżący w momencie $j, j = 0, 1, 2, \dots, n$ wyraża się wzorem:

$$S_j = \sum_{m=j+1}^n R_m (1+i)^{j-m}$$

W momentach $j = 1, 2, \dots, n$ wzór na dług bieżący można zapisać w równoważnej postaci:

$$S_j = S_{j-1} (1+i) - R_j$$

skąd

$$R_j = (S_{j-1} - S_j) + i S_{j-1}$$

gdzie iloczyn $i S_{j-1}$ wyraża odsetki O_j należne za j -ty okres bazowy. Oznaczając przez U_j różnicę $S_{j-1} - S_j$, otrzymujemy dekompozycję raty na część kapitałową oraz na część odsetkową:

$$R_j = U_j + O_j$$

Zestawienie zawierające informacje o wartości początkowej długu, długu bieżącym i racie w podziale na część kapitałową oraz odsetkową w dowolnym momencie $j = 1, 2, \dots, n$ nazywa się schematem lub harmonogramem spłaty długu. Opiszemy dwie najbardziej popularne formy spłat długu: spłata ratami o stałej części kapitałowej oraz spłata ratami annuitetowymi. Oba te schematy spełniają warunek równoważności długu i rat.

Spłata długu ratami o stałej części kapitałowej

Rozważamy spłatę długu, którego wartość w momencie $t = 0$ wynosi S_0 . Ciąg rat $R_j, j = 1, 2, \dots, n$ nazywa się ciągiem rat o stałej części kapitałowej²⁷, jeżeli część kapitałowa raty R_j dla każdego j wyraża się wzorem:

²⁷ W praktyce dla tego typu kredytów używana jest często nazwa „kredyt o malejących ratach”. Jest to nazwa nieprecyzyjna, gdyż po pierwsze istnieje wiele innych schematów spłat z malejącymi ratami, a po drugie, odnosi się wyłącznie do sytuacji, gdy w całym okresie kredytowania obowiązuje stała, dodatnia stopa procentowa i .

$$U_j = U = \frac{S_0}{n} \quad (26)$$

oraz

$$R_j = U + O_j \quad (27)$$

Przy spłacie długu ratami o stałej części kapitałowej dług bieżący po spłacie kolejnej raty zmniejsza się o stałą wielkość, równą n -tej części długu początkowego, zatem wartość długu bieżącego w momencie $j, j = 0, 1, 2, \dots, n$, jest dana wzorem

$$S_j = S_0 - j U \quad (28)$$

Część odsetkowa raty j -tej raty wyraża się wzorem:

$$O_j = (n - j + 1) U i \quad (29)$$

Łatwo sprawdzić, że dla $i > 0$ ciąg wartości odsetek (O_j) jest malejącym ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie $S_0 i$ oraz różnicy $- U i$. Ponieważ część kapitałowa raty jest stała, ciąg wartości rat (R_j) jest również malejącym ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie $U + S_0 i$ oraz różnicy $- U i$. Zatem, przy spłacie kredytu ratami o stałej części kapitałowej, największe obciążenia ratami kredytu kredytobiorca ponosi w początkowym okresie kredytowania. Pierwsze raty są istotnie wyższe niż raty w ostatnim okresie kredytowania, gdyż część odsetkowa raty jest w każdej kolejnej racie mniejsza od poprzedniej. Różnice w ratach są szczególnie widoczne dla długiego okresu kredytowania oraz dla wyższych stóp procentowych.

Przykład 14. Spłata kredytu ratami o stałej części kapitałowej

Kredyt w wysokości 12 000 zł będzie spłacany sześcioma miesięcznymi ratami o stałej części kapitałowej. Sporządzić harmonogram spłat kredytu, jeśli oprocentowanie jest stałe w trakcie obowiązywania umowy i wynosi 24% p.a. (tabela 12.6.).

Rozwiązanie:

Tabela 12.6. Harmonogram spłat kredytu – raty o stałej części kapitałowej [zł]

j	S_{j-1}	U_j	O_j	R_j	S_j
1	12 000	2 000	240	2 240	10 000
2	10 000	2 000	200	2 200	8 000
3	8 000	2 000	160	2 160	6 000
4	6 000	2 000	120	2 120	4 000

5	4 000	2 000	80	2 080	2 000
6	2 000	2 000	40	2 040	0
Ogółem		12 000	840	12 840	

Źródło: opracowanie własne.

Część kapitałową raty U obliczono ze wzoru (26):

$$U = \frac{S_0}{n} = \frac{12000}{6} = 2000 \text{ zł}$$

Do obliczenia długu bieżącego S_j wykorzystano wzór (28). Przykładowo, dług bieżący po spłacie pierwszej raty wynosi $S_1 = S_0 - U = 12\,000 - 2\,000 = 10\,000$ zł.

Odsetki obliczane są od kapitału pozostającego do spłacenia (por. wzór (29)), przy wykorzystaniu stopy procentowej okresu bazowego i w wysokości 2% (kredyt spłacany jest miesięcznie, zatem $i = \frac{24\%}{12} = 2\%$). Przykładowo część odsetkowa pierwszej raty O_1 została obliczona jako 2% od kwoty 12 000 zł, O_2 jako 2% od 10 000 zł, itd. Raty kredytu R_j są sumą części odsetkowej O_j oraz części kapitałowej U .

Spłata długu ratami annuitetowymi

W przypadku rat annuitetowych dług o wartości S_0 w momencie $t = 0$ jest spłacany ratami o stałej wartości:

$$R_j = R \text{ dla } j = 1, 2, \dots, n$$

Warunek równoważności długu i rat (wzór (25)), dla momentu początkowego $j = 0$ przybiera postać:

$$S_0 = R \sum_{m=1}^n (1+i)^{-m} \tag{30}$$

Po prawej stronie wzoru (30) występuje suma pierwszych n wyrazów ciągu geometrycznego o początkowym wyrazie $a_1 = (1+i)^{-1}$ i o ilorazie $q = (1+i)^{-1}$. Po zastosowaniu wzoru na sumę pierwszych n wyrazów ciągu geometrycznego, S_0 można wyrazić jako (dla $i \neq 0$):

$$S_0 = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Stąd otrzymujemy wzór na ratę annuitetową:

$$R = \frac{S_0 i}{1 - (1+i)^{-n}} \quad (31)$$

Można pokazać, że dług bieżący S_j dla $j = 0, 1, 2, \dots, n$, wyraża się wzorem:

$$S_j = S_0 \left[(1+i)^j - \frac{(1+i)^j - 1}{1 - (1+i)^{-n}} \right] \quad (32)$$

oraz że ciąg wartości części kapitałowej raty (U_j) , $j = 1, 2, \dots, n$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $(1+i)$, oraz o pierwszym wyrazie $U_1 = R - K_0 i$.

Wartość raty jest stała w całym okresie kredytowania, ale jej struktura zmienia się w czasie: część kapitałowa jest większa w każdej kolejnej racie, natomiast zmniejsza się część odsetkowa raty (przy założeniu dodatniej stopy procentowej okresu bazowego).

Przykład 15. Spłata kredytu ratami annuitetowymi

Kredyt o wartości 12 000 zł będzie spłacany sześcioma miesięcznymi ratami annuitetowymi. Sporządzić harmonogram spłat kredytu, jeśli oprocentowanie kredytu jest stałe w trakcie obowiązywania umowy i wynosi 24% p.a.

Rozwiązanie:

Sporządzanie harmonogramu zaczynamy od obliczenia wartości raty annuitetowej. Kredyt jest spłacany miesięcznie, zatem stopa oprocentowania okresu bazowego wynosi $i = \frac{24\%}{12} = 2\%$. Stosując wzór (31), otrzymujemy wartość raty:

$$R = \frac{S_0 i}{1 - (1+i)^{-n}} = \frac{12\,000 \cdot 0,02}{1 - (1+0,02)^{-6}} = 2\,142,31 \text{ zł}$$

Wypełnianie tabeli, określającej harmonogram spłat kredytu, zaczynamy od pierwszego wiersza. Ponieważ wszystkie raty są równe, $R_1 = 2\,142,31$ zł. Część odsetkową pierwszej raty O_1 obliczamy jako 2% od kwoty 12 000 zł, co jest równe 240 zł. Część kapitałową pierwszej raty U_1 otrzymujemy po odjęciu części odsetkowej O_1 od raty annuitetowej: $2\,142,31 - 240 = 1\,902,31$ zł. Dług bieżący S_1 po zapłaceniu pierwszej raty wynosi $12\,000 - 1\,902,31 = 10\,097,69$ zł. Następnie wypełniamy w analogiczny sposób drugi wiersz tabeli. Druga rata R_2 jest równa 2 142,31 zł. Część odsetkową drugiej raty O_2 obliczamy jako 2% od 10 097,69 zł,

co jest równe 201,95 zł. Część kapitałowa U_2 jest równa $2142,31 - 201,95 = 1940,36$ zł, a dług bieżący S_2 po zapłaceniu drugiej raty wynosi $10\,097,69 - 1940,36 = 8157,33$ zł. Procedurę powtarzamy aż do ostatniej spłaty. Cały harmonogram spłat kredytu przedstawiony jest w tabeli 12.7.

Tabela 12.7. Harmonogram spłat kredytu – raty annuitetowe [zł]

j	S_{j-1}	U_j	O_j	R_j	S_j
1	12 000,00	1 902,31	240,00	2 142,31	10 097,69
2	10 097,69	1 940,36	201,95	2 142,31	8 157,33
3	8 157,33	1 979,16	163,15	2 142,31	6 178,17
4	6 178,17	2 018,75	123,56	2 142,31	4 159,42
5	4 159,42	2 059,12	83,19	2 142,31	2 100,30
6	2 100,30	2 100,30	42,01	2 142,31	0,00
Ogółem		12 000,00	853,86	12 853,86	

Źródło: opracowanie własne.

Porównanie spłat kredytu ratami o stałej części kapitałowej i ratami annuitetowymi

Omówimy wybrane cechy charakterystyczne dla obu schematów spłat, zakładając, że kwota kredytu, okres kredytowania, częstotliwość spłat oraz wysokość stopy procentowej są takie same w obu przypadkach oraz że $S_0 > 0$, $i > 0$, $n > 1$. Z własności tych powinien sobie zdawać sprawę w szczególności kredytobiorca zaciągający kredyt długoterminowy, dlatego zilustrujemy je na przykładach długoterminowych kredytów mieszkaniowych.

Wzory określające wartość poszczególnych rat

Dla kredytu spłacanego ratami o stałej części kapitałowej, wzory określające wartości poszczególnych rat (wzory (27), (29)) oraz długu bieżącego (wzór (28)) są proste i intuicyjne, wiadomo „skąd się one wzięły”. Nawet klient niezbyt biegły w matematyce finansowej rozumie, jak jest obliczona część kapitałowa raty i jak są naliczane odsetki. Kredytobiorca może łatwo w każdej chwili obliczyć, ile jeszcze kapitału pozostało do spłacenia. Wzór (31) na ratę annuitetową oraz wzór (32) na dług bieżący są bardziej skomplikowane i do ich zrozumienia potrzebna jest znajomość podstawowych koncepcji wartości kapitału w czasie, takich jak aktualizacja wartości kapitału oraz zasada równoważności kapitałów.

Wartość pierwszej raty

Pierwsza rata dla kredytu spłacanego ratami annuitetowymi jest zawsze niższa niż dla kredytu spłacanego ratami o stałej części kapitałowej. Fakt ten ma szczególne znaczenie, gdyż pierwsza rata jest wykorzystywana przez banki do określania zdolności kredytowej klienta, zatem spłata kredytu ratami annuitetowymi na ogół zwiększa zdolność kredytową przyszłego kredytobiorcy. W tabeli 12.8. pokazano wartość pierwszej raty, zaokrągloną do pełnych złotych, w obu schematach spłat dla kredytu o wartości 300 000 zł spłacanego miesięcznie, dla kilku wariantów oprocentowania oraz okresu kredytowania. Różnice są tym większe, im większe jest oprocentowanie kredytu oraz im krótszy jest okres kredytowania.

Tabela 12.8. Wartość pierwszej raty [w zł] dla kredytu o wartości 300 000 zł

Oprocentowanie kredytu p.a.						
Okres kredytowania w latach	4%		8%		12%	
	annuitet	stała część kapitałowa	annuitet	stała część kapitałowa	annuitet	stała część kapitałowa
30	1 432	1 833	2 201	2 833	3 086	3 833
25	1 584	2 000	2 315	3 000	3 160	4 000
20	1 818	2 250	2 509	3 250	3 303	4 250

Źródło: opracowanie własne.

Łączna kwota odsetek

Odsetki stanowią najistotniejszą część kosztu kredytu długoterminowego. Choć zgodnie z zasadami matematyki finansowej nie powinno się sumować kwot z różnych momentów czasowych, w praktyce koszt kredytu jest często określany jako zwykła suma odsetek. Jest to np. standardowa informacja, którą klient otrzymuje, gdy korzysta z kalkulatorów kredytowych dostępnych na różnych portalach finansowych.

W tabeli 12.9. przedstawiono łączną kwotę odsetek, zaokrągloną do pełnych złotych, dla kredytu o wartości 300 000 zł spłacanego miesięcznie dla obu schematów spłat. Uwzględniono kilka wariantów oprocentowania kredytu oraz okresu kredytowania.

Tabela 12.9. Łączna wartość odsetek (w zł) dla kredytu o wartości 300 000 zł

Okres kredytowa- nia w latach	Oprocentowanie kredytu p.a.					
	4%		8%		12%	
	annuitet	stała część kapitałowa	annuitet	stała część kapitałowa	annuitet	stała część kapitałowa
30	215 609	180 500	492 466	361 000	810 902	541 500
25	175 053	150 500	394 635	301 000	647 902	451 500
20	136 306	120 500	302 237	241 000	492 782	361 500

Źródło: opracowanie własne.

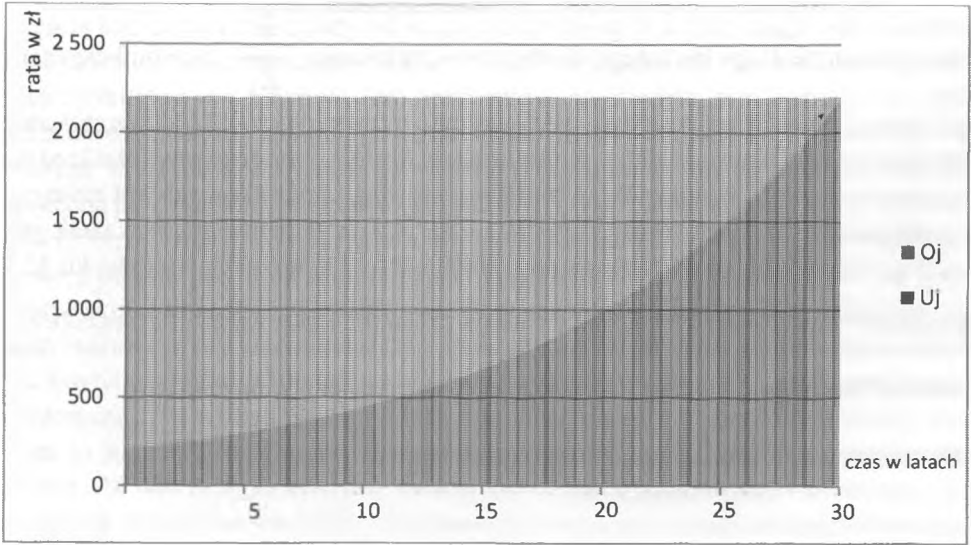
Łączna kwota odsetek przy spłacie kredytu ratami annuitetowymi jest wyższa, niż w przypadku spłat kredytu ratami o stałej części kapitałowej. Różnice są tym większe, im wyższe jest oprocentowanie kredytu oraz im dłuższy okres kredytowania.

Część kapitałowa raty

Z poprzednich rozważań wiemy, że przy spłacie długu ratami annuitetowymi, część kapitałowa jest w każdej następnej racie $(1 + i)$ razy większa niż w poprzedniej, a przy spłacie długu ratami o stałej części kapitałowej – jak sama nazwa wskazuje – część kapitałowa w każdej racie jest stała. Dekompozycję rat na część kapitałową i odsetkową na przykładzie 30-letniego kredytu o wartości 300 000 zł i oprocentowaniu 8% p.a., spłacanego miesięcznymi ratami przedstawiono na rysunku 12.1. oraz rysunku 12.2.

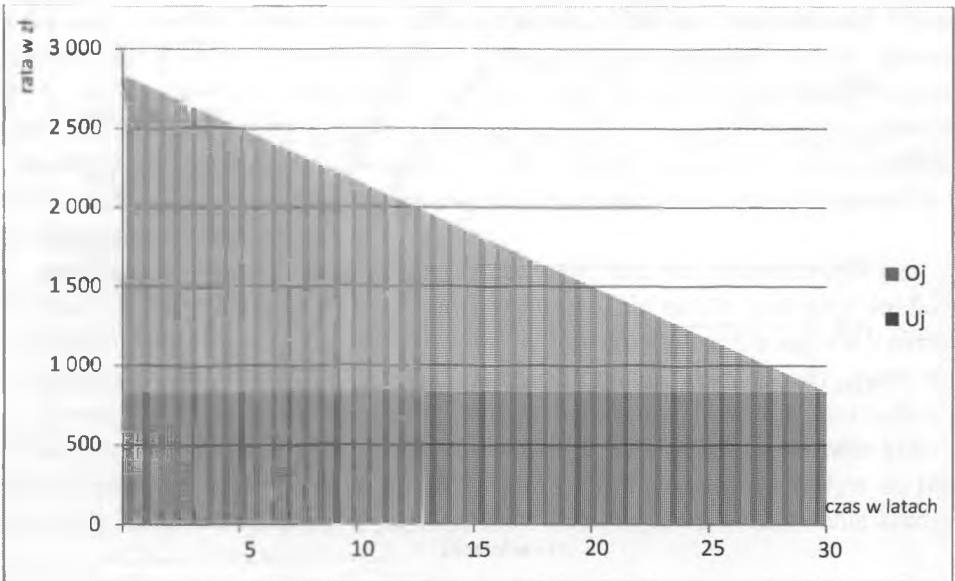
Dla kredytu spłacanego ratami annuitetowymi, wartość raty jest w całym okresie kredytowania stała, równa 2201,29 zł. Udział części kapitałowej zwiększa się w każdej kolejnej racie. Najwięcej kapitału kredytobiorca spłaca w ostatnim okresie obowiązywania umowy kredytowej. W pierwszej racie kredytobiorca spłaci 201,29 zł kapitału, w każdej kolejnej racie $\left(1 + \frac{0,08}{12}\right)$ razy więcej. W ostatniej racie część kapitałowa raty wyniesie 2186,72 zł. Dla kredytu spłacanego w ratach o stałej części kapitałowej pierwsza rata wynosi 2833,33 zł, z czego kapitał wynosi 833,33 zł. W każdej następnej racie część kapitałowa wynosi tyle samo, a odsetki w każdej kolejnej racie są coraz mniejsze. W pierwszej racie zapłacimy 2000 zł odsetek, a w ostatniej 5,56 zł.

Rysunek 12.1. Dekompozycja rat na część kapitałową (U_j) oraz odsetkową (O_j) dla kredytu spłacanego ratami annuitetowymi



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 12.2. Dekompozycja rat na część kapitałową (U_j) oraz odsetkową (O_j) dla kredytu spłacanego ratami o stałej części kapitałowej

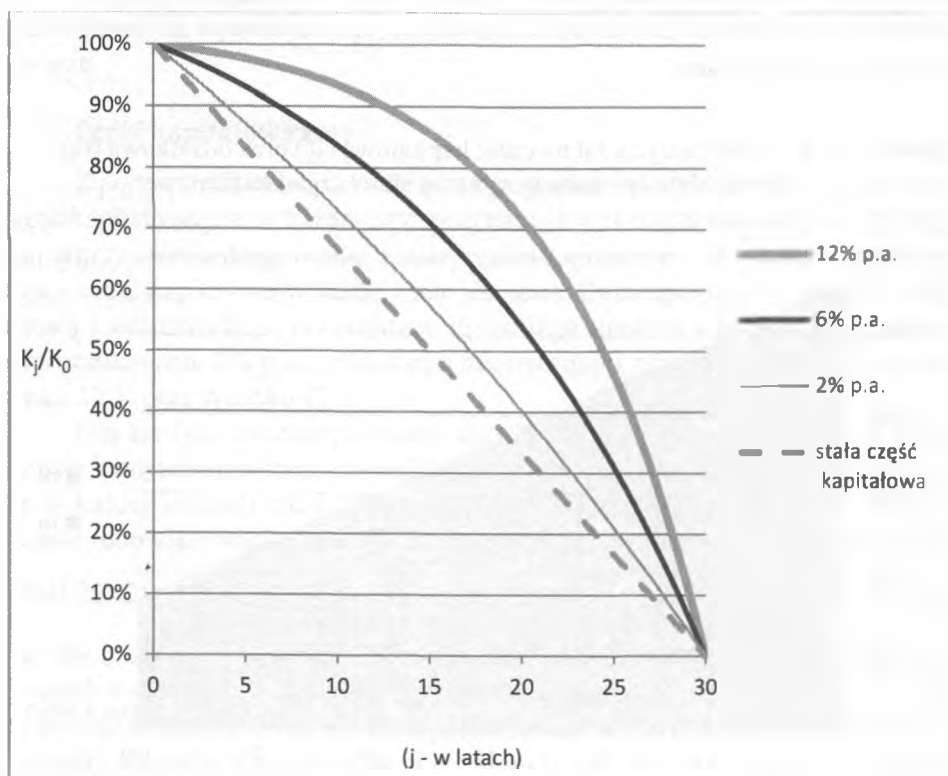


Źródło: opracowanie własne.

Stosunek długu bieżącego do kwoty kapitału początkowego

Dla kredytobiorcy jest ważna szybkość spłacania długu K_0 . W tym celu zbadamy stosunek długu bieżącego do długu początkowego $\frac{K_j}{K_0}$ jako funkcję czasu dla obu schematów spłat kredytu. W dowolnym momencie $j = 0, 1, 2, \dots, n$ stosunek ten nie zależy od wartości długu początkowego K_0 . Dla obu sposobów spłat kredytu w momencie $j = 0$ stosunek długu bieżącego do długu początkowego jest równy 1, w momencie $j = n$ jest równy 0, a dla $j = 1, 2, \dots, n-1$ omawiany wskaźnik jest niższy dla kredytu spłacanego ratami o stałej części kapitałowej. Na rysunku 12.3 przedstawiono wykresy $\frac{K_j}{K_0}$ jako funkcji czasu dla kilku wartości oprocentowania kredytu, na przykładzie 30-letniego kredytu spłacanego miesięcznie.

Rysunek 12.3. Stosunek długu bieżącego do kapitału początkowego jako funkcja czasu



Źródło: opracowanie własne.

Linia przerywana jest wykresem funkcji $\frac{K_i}{K_0}$ dla kredytu o ratach ze stałą

częścią kapitałową (nie zależy od stopy procentowej i), a linie ciągłe odpowiadają kredytom o ratach annuitetowych dla różnych wariantów oprocentowania. Przy ratach annuitetowych, czym wyższe oprocentowanie kredytu, tym później jest spłacana określona część kapitału początkowego. Na przykład, dla kredytu oprocentowanego w wysokości 2% w skali rocznej, połowa pożyczonego kapitału zostanie spłacona po 17 latach, przy oprocentowaniu 6% po 21 latach, a przy oprocentowaniu 12% p.a. dopiero po 24 latach. Tempo zmniejszania się długu jest ważne nie tylko z punktu widzenia samopoczucia kredytobiorcy, ale przekłada się na konkretne skutki finansowe, przykładowo, przy sprzedaży mieszkania przed spłatą całego zadłużenia czy wcześniejszej spłaty kredytu. Gdyby kredytobiorca chciał spłacić kredyt o wartości 300 000 zł wcześniej, na przykład po 20 latach, przy oprocentowaniu 2% w skali rocznej miałby do spłacenia 40% początkowej kwoty kredytu, to jest 120 000 zł, a przy oprocentowaniu 12% p.a., 72% kwoty początkowej, to jest 216 000 zł. Przy kredycie spłacanym ratami o stałej części kapitałowej, po 20 latach kredytobiorca miałby do spłacenia jedną trzecią kapitału początkowego, czyli 100 000 zł, niezależnie od wysokości stopy procentowej kredytu.

Na podstawie powyższych rozważań można sformułować kilka ogólnych zasad, które należy brać pod uwagę przy doborze optymalnego wariantu długoterminowego kredytu mieszkaniowego.

W przypadku spłat kredytu ratami o stałej części kapitałowej, największe obciążenia kredytobiorca ponosi w początkowym okresie kredytowania. Biorąc pod uwagę, że kredyty długoterminowe zaciągają głównie osoby młode, dla których – ze względu na ich sytuację finansową – wysokość raty jest nieraz najważniejszym kryterium przy wyborze schematu spłaty²⁸, częściej wybierane są spłaty annuitetowe. Należy jednak pamiętać, że w przypadku rat o stałej części kapitałowej, szybkość spłacania kapitału jest wyższa, a łączna suma odsetek niższa niż w przypadku rat annuitetowych.

Mimo że oprocentowanie mieszkaniowego kredytu hipotecznego jest zazwyczaj niższe niż dla innych rodzajów kredytów, nie należy pożyczać środków „na wszelki wypadek”, ale dokładnie tyle, ile jest niezbędne. Co się tyczy okresu kredytowania, powinno się wziąć pod uwagę następujące dwie zasady. Jeżeli kredytobiorcy zależy na jak najmniejszej racie, to należy brać kredyt na maksymalnie długi okres. Wtedy znacząco rośnie koszt kredytu, jak też wydłuża się okres, w którym kredytobiorca narażony jest na różne rodzaje ryzyka, które mają wpływ na jego zdolność do spłacania kredytu (w przypadku zmiennego oprocentowania kredytu

²⁸ Kredytobiorca nie zawsze ma możliwość wyboru schematu spłaty kredytu – często jest to decyzja banku, wynikająca z przyjętego sposobu oceny zdolności kredytowej klienta.

ryzyko stopy procentowej, ryzyko walutowe dla kredytów walutowych, ryzyko utraty pracy, ryzyko zachorowania, ryzyko utraty wartości nieruchomości itp.). Jeżeli kredytobiorca chce maksymalnie obniżyć koszt kredytu (zapłacić jak najmniej odsetek), należy brać kredyt na możliwie krótki okres. Taki wybór prowadzi do zwiększenia miesięcznej raty i w związku z tym, wzrost ryzyka utraty zdolności kredytowej w przypadku zmniejszenia się dochodów lub w przypadku nieoczekiwanych wydatków. Jeżeli skrócenie okresu kredytowania doprowadziłoby do tego, że miesięczna rata jest większa niż 30% miesięcznych dochodów, to należy raczej wydłużyć okres kredytowania.

Tak więc wybór schematu spłaty kredytu nie jest jednoznaczny. W podjęciu decyzji pomaga wykonanie symulacji spłat kredytu (dla różnych kwot kredytu oraz okresów kredytowania) uwzględniających różne warianty zmian sytuacji rynkowej oraz sytuacji życiowo-finansowej kredytobiorcy.

Uwzględnienie zmiennego oprocentowania w kalkulacji rat

Zakładamy, że w okresach bazowych $j = 1, 2, \dots, n$ obowiązują stopy procentowe $i_1, i_2, \dots, i_n$. W sytuacji, gdy stopy procentowe okresów bazowych są zróżnicowane, ale znane w momencie udzielania kredytu, klient nie ponosi ryzyka stopy procentowej. Najczęściej jednak stopy procentowe dla całego okresu kredytowania nie są znane, znany jest natomiast „mechanizm” ich kalkulacji – wtedy klient ponosi ryzyko stopy procentowej. Z taką sytuacją mamy do czynienia na przykład wtedy, gdy podstawą do ustalania oprocentowania kredytów jest rynkowa stopa referencyjna (przykładowo Wibor – dla kredytów złotych, Libor lub Euroribor dla kredytów walutowych) powiększona o marżę banku. Oznacza to na ogół, że gdy rynkowe stopy rosną, oprocentowanie kredytów rośnie, a gdy maleją, oprocentowanie kredytów spada. Mechanizmy aktualizacji oprocentowania kredytów stosowane przez banki są różne: niektóre banki ustalają oprocentowanie raz na miesiąc, inne co kwartał, pół roku a nawet rok; niektóre wykorzystują aktualną stopę rynkową, inne zaś średnią. Marża banku może być stała w trakcie obowiązywania umowy, lub zmieniana co pewien czas.

Zmienne oprocentowanie kredytu – raty o stałej części kapitałowej

Zmiany oprocentowania nie mają wpływu na część kapitałową raty U , która jest stała w trakcie obowiązywania umowy kredytowej. Odsetki są liczone od kapitału pozostającego do spłacenia według stopy procentowej obowiązującej w danym okresie bazowym. Przykładowo, gdy w j -tym okresie bazowym obowiązuje stopa i_j , to odsetki za j -ty okres obliczamy według wzoru (por. wzór (29)):

$$O_j = (n - j + 1) U i_j \quad (33)$$

Zmieniające się oprocentowanie kredytu ma wpływ jedynie na część odsetkową raty.

Zmienne oprocentowanie kredytu – raty annuitetowe

Postępowanie przy obliczaniu rat annuitetowych zależy od tego, czy stopy procentowe obowiązujące w poszczególnych okresach bazowych są znane w momencie podpisywania umowy kredytowej, czy nie. Rozpatrzmy obie sytuacje:

- a) Stopy procentowe $i_1, i_2, \dots, i_n$ są znane w momencie podpisywania umowy kredytowej.

Wzór na wartość raty annuitetowej otrzymujemy z warunku równoważności kapitału i rat, który dla zmiennych stóp procentowych przedstawia się następująco:

$$S_0 = R \left[\frac{1}{(1+i_1)} + \frac{1}{(1+i_1)(1+i_2)} + \dots + \frac{1}{(1+i_1)(1+i_2)\dots(1+i_n)} \right]$$

Stąd otrzymujemy wzór na ratę annuitetową w postaci (zapisując wyrażenie w nawiasie kwadratowym za pomocą symboli sumy oraz iloczynu):

$$R = \frac{S_0}{\sum_{j=1}^n \left[\prod_{m=1}^j (1+i_m) \right]^{-1}} \quad (34)$$

gdzie i_m oznacza stopę m -tego okresu bazowego, $m = 1, 2, \dots, n$. Tak wyznaczona wartość raty obowiązuje w całym okresie kredytowania.

- b) W momencie podpisywania umowy kredytowej nie jest znane kształtowanie się stóp procentowych $i_1, i_2, \dots, i_n$ w całym okresie kredytowania.

Ratę annuitetową obliczamy przy założeniu, że stopa procentowa pierwszego okresu bazowego i_1 będzie obowiązywała w całym okresie obowiązywania umowy kredytowej, to jest wg wzoru (31):

$$R = \frac{S_0 i_1}{1 - (1+i_1)^{-n}}$$

Wartość raty nie zmienia się dopóty, dopóki nie zmienia się oprocentowanie kredytu. Jeżeli zmiana stopy procentowej dotyczy k -tego okresu, to wartość raty annuitetowej obliczana jest „od nowa”, dla kredytu o okresie kredytowania równemu $n - k + 1$ okresów bazowych, wartości początkowej

S_{k-1} oraz stopie procentowej i_k . Zatem nową ratę annuitetową R' oblicza się według wzoru:

$$R' = \frac{S_{k-1} i_k}{1 - (1 + i_k)^{-(n-k+1)}} \quad (35)$$

Proces ten powtarzamy tyle razy, ile razy zmieniane jest oprocentowanie kredytu. Tak więc przy oprocentowaniu zmiennym, na przykład zależnym od warunków rynkowych, raty annuitetowe są tej samej wartości tylko w okresach, w których nie zmienia się oprocentowanie kredytu. Zmiana oprocentowania wpływa nie tylko na wartość raty ogółem, ale też na strukturę raty w podziale na część odsetkową i kapitałową.

Przykład 16. Kalkulacja raty annuitetowej przy zmiennych stopach procentowych

Półroczny kredyt w wysokości 12 000 zł będzie spłacany sześcioma miesięcznymi ratami annuitetowymi. Sporządzić harmonogram spłat kredytu, jeśli oprocentowanie kredytu w pierwszych dwóch miesiącach obowiązywania umowy wynosiło 24% p.a., w następnych dwóch miesiącach 20% p.a., a w ostatnich dwóch miesiącach 16% p.a. oraz stopy procentowe

- były znane w momencie podpisywania umowy kredytowej,
- zmieniały się w trakcie okresu kredytowania w zależności od zmian stóp rynkowych.

Rozwiązanie:

- Harmonogram spłat kredytu przedstawia tabela 12.10.

Rata annuitetowa wynosi 2127,60 zł i została obliczona ze wzoru:

$$R = \frac{S_0}{\left(\frac{1}{(1+i_1)} + \frac{1}{(1+i_1)(1+i_2)} + \dots + \frac{1}{(1+i_1)(1+i_2)\dots(1+i_6)} \right)}$$

gdzie $S_0 = 12\,000$, $i_1 = i_2 = \frac{24\%}{12}$, $i_3 = i_4 = \frac{20\%}{12}$, $i_5 = i_6 = \frac{16\%}{12}$

Odsetki w j -tym okresie bazowym, $j = 1, 2, \dots, 6$ obliczane są według wzoru $O_j = S_{j-1} \cdot i_j$. Przykładowo, odsetki za drugi okres bazowy zostały obliczone jako:

$$O_2 = 10\,112,40 \cdot \frac{0,24}{12} = 202,25 \text{ zł}$$

Tabela 12.10. Harmonogram spłat kredytu przy zmiennych stopach procentowych znanych w momencie podpisywania umowy

j	i_j	S_{j-1}	U_j	O_j	R_j	S_j
1	2,0%	12 000,00	1 887,60	240,00	2 127,60	10 112,40
2	2,0%	10 112,40	1 925,35	202,25	2 127,60	8 187,05
3	1,7%	8 187,05	1 991,15	136,45	2 127,60	6 195,91
4	1,7%	6 195,91	2 024,33	103,27	2 127,60	4 171,58
5	1,3%	4 171,58	2 071,98	55,62	2 127,60	2 099,60
6	1,3%	2 099,60	2 099,60	27,99	2 127,60	0,00
Ogółem			12 000,00	765,58	12 765,58	

Źródło: opracowanie własne.

- b) Ponieważ oprocentowanie kredytu zmienia się w trakcie okresu kredytowania w zależności od zmian stóp rynkowych, sporządzenie całego harmonogramu jest możliwe ex post, czyli w momencie, kiedy znane jest już kształtowanie się oprocentowania kredytu w całym okresie kredytowania. Harmonogram spłat kredytu przedstawia tabela 12.11.

Tabela 12.11. Harmonogram spłat kredytu przy oprocentowaniu zmieniającym się w trakcie okresu kredytowania w zależności od zmian stóp rynkowych

j	i_j	S_{j-1}	U_j	O_j	R_j	S_j
1	2,0%	12 000,00	1 902,31	240,00	2 142,31	10 097,69
2	2,0%	10 097,69	1 940,36	201,95	2 142,31	8 157,33
3	1,7%	8 157,33	1 989,05	135,96	2 125,01	6 168,28
4	1,7%	6 168,28	2 022,20	102,80	2 125,01	4 146,08
5	1,3%	4 146,08	2 059,31	55,28	2 114,59	2 086,77
6	1,3%	2 086,77	2 086,77	27,82	2 114,59	0,00
Ogółem			12 000,00	763,82	12 763,82	

Źródło: opracowanie własne.

Na początku obliczyliśmy ratę annuitetową przy założeniu, że stopa 24% p.a. będzie obowiązywać w trakcie całego okresu kredytowania (wzór (31)). Stąd pierwsze dwie raty przyjmują wartość:

$$R_1 = R_2 = \frac{12\,000 \cdot \frac{0,24}{12}}{1 - \left(1 + \frac{0,24}{12}\right)^{-6}} = 2\,142,31 \text{ zł}$$

Kiedy w wyniku zmian stóp rynkowych oprocentowanie kredytu zmienia się na 20% p.a., to obliczamy nową ratę annuitetową dla kredytu o wartości 8157,33 zł (dług bieżący po spłaceniu drugiej raty) przy założeniu, że takie oprocentowanie będzie obowiązywać do końca okresu kredytowania, czyli przez 4 miesiące. Stąd

$$R_3 = R_4 = \frac{8\,157,33 \cdot \frac{0,2}{12}}{1 - \left(1 + \frac{0,2}{12}\right)^{-4}} = 2\,125,01 \text{ zł}$$

Następna zmiana stóp rynkowych, powodująca obniżenie oprocentowania kredytu do 16% p.a., pociąga za sobą obliczenie nowej raty annuitetowej dla kredytu o wartości 4146,08 zł na okres dwóch miesięcy:

$$R_5 = R_6 = \frac{4\,146,08 \cdot \frac{0,16}{12}}{1 - \left(1 + \frac{0,16}{12}\right)^{-2}} = 2\,114,59 \text{ zł}$$

Uwzględnienie w okresach bazowych kalendarzowej liczby dni

Wszystkie dotychczasowe rozważania dotyczące spłaty długu zostały przeprowadzone przy założeniu jednakowej długości okresów bazowych. W praktyce przy obliczaniu rat kredytu najczęściej uwzględnia się kalendarzową liczbę dni w poszczególnych okresach bazowych (np. w miesiącach), a więc okresy bazowe nie muszą być tej samej długości. Uwzględnienie rzeczywistej liczby dni we wzorach (33), (34), (35) sprowadza się do użycia w nich stóp bazowych obliczonych według wzoru:

$$i_j = \frac{t_j}{T} r_j, \text{ dla } j = 1, 2, \dots, n$$

gdzie:

t_j wyraża w dniach długość j -tego okresu bazowego, r_j – oprocentowanie kredytu w j -tym okresie bazowym, wyrażone w skali rocznej, T – liczba dni w roku.

12.5. Kredyty walutowe

Pod nazwą kredyt walutowy zazwyczaj rozumie się albo kredyt udzielony i spłacany w walucie obcej, albo kredyt denominowany w walucie obcej. Kredyt denominowany udzielany jest w walucie krajowej, ale w dniu podpisania umowy jego wartość jest przeliczana na walutę obcą (np. EUR, CHF, USD) według bieżącego kursu kupna. Harmonogram spłat sporządzany jest w walucie obcej, przy czym odsetki są naliczane wg oprocentowania waluty obcej. Spłaty kredytu dokonywane są w walucie krajowej po przeliczeniu według kursu sprzedaży waluty obowiązującym w dniu spłaty.

Harmonogram spłat kredytu denominowanego w walucie obcej w wyrażeniu złotowym

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

FC – waluta obca (*foreign currency*).

α_0 – kurs kupna waluty obcej FC/PLN w momencie udzielania kredytu

β_j – kurs sprzedaży waluty obcej FC/PLN , w momencie spłaty j -tej raty,
 $j = 1, 2, \dots, n$,

S^{PLN} – wartość udzielonego kredytu w złotych,

S_0^{FC} – wartość udzielonego kredytu w walucie obcej

$$S_0^{FC} = \frac{S^{PLN}}{\alpha_0}$$

i^{FC} – bazowa stopa procentowa dla waluty obcej.

Sporządzenie harmonogramu spłaty kredytu w wyrażeniu złotowym, zarówno dla spłaty ratami annuitetowymi, jak i spłaty ratami o stałej części kapitałowej, sprowadza się do sporządzenia harmonogramu spłat kredytu S_0^{FC} w wyrażeniu walutowym i do późniejszego przeliczania każdej raty i długu bieżącego na złote według aktualnego kursu sprzedaży danej waluty obcej. Zwróćmy uwagę, że nawet po wieloletnim spłacaniu kredytu walutowego, wartość długu bieżącego wyrażona w złotych, przy niekorzystnym kształtowaniu się kursu walutowego, może być znacznie wyższa niż wartość zaciągniętego kredytu w złotych.

Przykładowo, dla kredytu denominowanego w walucie obcej spłacanego ratami o stałej części kapitałowej dług bieżący w wyrażeniu złotowym oblicza się według wzoru:

$$S_j^{PLN} = S_0^{FC} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \beta_j$$

a część kapitałowa oraz odsetkowa j -tej raty w ujęciu złotowym wyrażają się wzorami:

$$U_j^{PLN} = \frac{S_0^{FC}}{n} \beta_j$$

$$O_j^{PLN} = S_j^{PLN} i^{FC}$$

dla $j = 1, 2, \dots, n$

W momencie spłaty pierwszej raty również kwota udzielonego kredytu wyrażona w walucie przeliczana jest na złote wg aktualnego kursu sprzedaży. W harmonogramie spłat kredytu w wyrażeniu złotowym jako wartość początkowa kredytu nie występuje więc wartość udzielonego kredytu S^{PLN} , ale wartość

$$S_0^{PLN} = S_0^{FC} \beta_1$$

Wpływ kursu waluty na wartość rat kredytu walutowego pokażemy na przykładzie kredytu spłacanego ratami o stałej części kapitałowej.

Przykład 17. Spłata kredytu denominowanego w walucie obcej ratami o stałej części kapitałowej

Kredyt o wartości 12 000 zł jest denominowany w EUR i będzie spłacany sześcioma miesięcznymi ratami o stałej części kapitałowej. Oprocentowanie kredytu jest stałe w trakcie obowiązywania umowy i wynosi 3% p.a. W dniu udzielenia kredytu oraz w momencie spłaty pierwszej raty kurs kupna EUR/PLN wynosił 4 zł, kurs sprzedaży 4,2 zł. Po spłaceniu pierwszej raty kurs kupna EUR/PLN wzrósł do poziomu 4,8 zł, a kurs sprzedaży do poziomu 5 zł i pozostał na niezmiennym poziomie do końca okresu kredytowania. Sporządzić harmonogram spłat kredytu.

Rozwiązanie:

Punktem wyjścia jest sporządzenie harmonogramu spłat kredytu wyrażonego w EUR (tabela 12.12.). Równowartość udzielonego kredytu w EUR wynosi 3000 EUR (12 000 zł przeliczono na euro po kursie kupna z dnia udzielenia kredytu).

Tabela 12.12. Harmonogram spłat kredytu w denominowanym w EUR w wyrażeniu walutowym

j	S_{j-1}^{EUR}	U_j^{EUR}	O_j^{EUR}	R_j^{EUR}	S_j^{EUR}
1	3 000	500	7,50	508	2 500
2	2 500	500	6,25	506	2 000
3	2 000	500	5,00	505	1 500
4	1 500	500	3,75	504	1 000
5	1 000	500	2,50	503	500
6	500	500	1,25	501	0
Ogółem		3 000	26,25	3 026	

Źródło: opracowanie własne.

Harmonogram spłat kredytu w wyrażeniu złotowym (tabela 12.13.) powstaje poprzez przeliczenie długu bieżącego i rat wyrażonych w EUR na złote, według kursu sprzedaży EUR/PLN obowiązującego w momentach spłat kredytu.

Tabela 12.13. Harmonogram spłat kredytu denominowanego w EUR w wyrażeniu złotowym

j	S_{j-1}^{PLN}	U_j^{PLN}	O_j^{PLN}	R_j^{PLN}	S_j^{PLN}
1	12 600	2 100	31,50	2 132	10 500
2	12 500	2 500	31,25	2 531	10 000
3	10 000	2 500	25,00	2 525	7 500
4	7 500	2 500	18,75	2 519	5 000
5	5 000	2 500	12,50	2 513	2 500
6	2 500	2 500	6,25	2 506	0
Ogółem		14 600	125,25	14 725	

Źródło: opracowanie własne.

Dług początkowy oraz pierwsza rata zostały przeliczone na złote wg kursu sprzedaży EUR/PLN na poziomie 4,2 zł. Dług bieżący oraz raty w momentach $i = 2, 3, \dots, 6$ przeliczono wg kursu sprzedaży EUR/PLN równym 5 zł. Zwróćmy uwagę, że w wyniku wzrostu kursu EUR/PLN, dług bieżący w wyrażeniu złotowym po spłaceniu pierwszej raty zmniejszył się tylko o 100 zł, mimo że w pierwszej

racie kredytobiorca spłacił 2100 zł kapitału. W rezultacie niekorzystnego dla kredytobiorcy kształtowania się kursu walut, odda on bankowi w ujęciu złotowym kapitał znacznie wyższy (14 600 zł), niż pożyczył (12 000 zł).

Jeżeli kredytobiorca nie osiąga przychodów w walucie, w której został zaciągnięty kredyt, to oprócz wszystkich innych rodzajów ryzyka związanych z zaciągnięciem kredytu, jest on narażony na ryzyko walutowe. Szczególnie w przypadku kredytów długoterminowych istnieje duża szansa na zmaterializowanie się tego ryzyka.

Skutki ryzyka walutowego odczuli między innymi kredytobiorcy w Polsce, którzy zaciągnęli kredyt mieszkaniowy w CHF. Po podjęciu przez Narodowy Bank Szwajcarii decyzji o uwolnieniu kursu franka szwajcarskiego wobec EUR²⁹ w styczniu 2015 r., kurs CHF gwałtownie wzrósł, w wyniku czego znacząco wzrosły raty kredytów udzielonych w tej walucie.

Dopóki kurs CHF, ani stawki Libor CHF nie ulegały istotnym niekorzystnym wahaniom, kredyty w CHF były korzystniejsze niż kredyty w PLN, gdyż ich oprocentowanie było znacznie niższe, co miało wpływ nie tylko na wartość raty, ale w przypadku rat annuitetowych, również na szybkość spłacania kapitału. Wydaje się, że kredytobiorcy zdawali sobie sprawę z większej opłacalności kredytów w CHF niż kredytów w PLN, ale jednocześnie nie mieli wyraźnej świadomości, że ceną, jaką płacą za lepsze warunki kredytowania, jest ryzyko walutowe (wszystko ma swoją cenę!).

Z przeprowadzonych w rozdziale rozważań wynika, że do zrozumienia istoty standardowych produktów finansowych, do jakich zaliczają się lokaty bankowe oraz kredyty, potrzebna jest znajomość podstaw matematyki finansowej. Przesłanką do zrozumienia i opanowania podstawowych koncepcji matematyki finansowej jest posiadanie wiedzy matematycznej na poziomie szkoły średniej: działania na potęgach, definicje i własności funkcji liniowej i wykładniczej, rozwiązywanie równań o jednej niewiadomej, itp. Wymaganie to wcale nie jest wymaganiem minimalistycznym. Po pierwsze, nie wszyscy konsumenci posiadają co najmniej wykształcenie średnie. Po drugie, nieraz spotykamy się ze zjawiskiem wtórnego analfabetyzmu matematycznego – to naturalne, że człowiek z czasem zapomina umiejętności, których dawno nie używał.

Na koniec warto wspomnieć raport naukowców z Harvard Business School „Programy nauczania w szkołach średnich a wyniki finansowe: wpływ obowiązkowych zajęć z finansów osobistych i matematyki”. Wiedza finansowa i zdolności poznawcze mają niewątpliwie wpływ na jakość podejmowania decyzji finansowych. Jednak niewiele jest dowodów na to, że edukacja, mająca na celu poprawę

²⁹ Swiss National Bank discontinues minimum exchange rate and lowers interest rate to -0,75%, Press Release, Swiss National Bank, Zurich, 15 January 2015, http://www.snb.ch/en/mmr/reference/pre_20150115/source/pre_20150115.en.pdf, dostęp 20.01.2015.

jakości podejmowanych decyzji finansowych, jest skuteczna. W raporcie starano się znaleźć odpowiedź na pytanie, czy dobrych nawyków finansowych można nauczyć się w szkole. Odpowiedź jest twierdząca – dodatkowe zajęcia z matematyki prowadzą do większego uczestnictwa w rynku finansowym, większych dochodów z inwestycji oraz do lepszego zarządzania kredytami³⁰.



³⁰ Cole S., Paulson A., Shastry G.K., *High School Curriculum and Financial Outcomes: The Impact of Mandated Personal Finance and Mathematics Courses*, Business Harvard School, Working Paper 13-064, April 8, 2014, http://www.hbs.edu/faculty/Publication%20Files/13-064_c7b52fa0-1242-4420-b9b6-73d32c639826.pdf, dostęp: 20.04.2015.